INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI

CATEDRA DE AERONAVE ȘI INSTALAȚII DE BORD

PROF. DR. ING. NICOLAE RĂCOVEANU

Electronică și Automatizări în Aviație

pentru uzul studenților

-1984-

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCURESTI

CATEDRA DE AERONAVE SI INSTALATII DE BORD

30.XI.1984

PROF. DR.ING. NICOLAE RACOVEANU

Electronicã și Automatizãri în Aviație

- mot. Tovoidale
- rolevoane
- cu fir.

-1984-

C U P R I N S U L

Cap.I : Introducere (3)

Cap.II : Stabilitate (5)
Metoda I-a a lui Liapunov (6).Metoda a doua a lui Liapunov (8).

Cap.III : Noţiuni elementare de teoria distribuţiilor (1o)
Spaţii fundamentale (1o).Distribuţii (11).Distribuţii regulate (12).Suportul unei distribuţii (13). Egalitatea distribuţiilor (13).Multiplicatorii pe $\mathcal{D}'$ (14).Translaţia unei distribuţii (15).Derivarea distribuţiilor (15).Distribuţii cu suport pozitiv (18).Produsul de convoluţie (18).Algebra $\mathcal{D}'_+$(21). Spaţiul bivectorial $(\mathcal{D}'_+, K, R)$(21).Ecuaţii diferenţiale in $\mathcal{D}'_+$(22).

Cap. IV : Transformata Fourier şi transformata Laplace (23)
Transformata Fourier (23).Transformata Laplace (27).

Cap. V : Circuite şi amplificatoare (29)
Circuite liniare cu parametri localizaţi (29).Metode cvaziliniare (32).Cuadripoli (33).Filtre (37). Circuite liniare cu parametri distribuiţi (39). Propagare (4o).Amplificatoare (42).

Cap. VI : Amplificatoare operaţionale şi aplicaţii (44)
Reacţia în amplificatoare (44).Sumatoare şi integratoare (47).Aplicaţii neliniare (5o).Alte aplicaţii (55).

Cap.VII : Noţiuni de teoria informaţiei (58).
Cantitatea de informaţie (58).Coduri (61).Modulaţia (64).Eşantionare şi restabilire (68).

Cap.VIII : Noţiuni de automate finite (7o).
Noţiuni de algebră (7o).Sisteme cu comandă directă(75). Sisteme secvenţiale (78).Aplicaţii şi exemple (81).

Cap. IX : Calculul comenzilor pentru zbor programat (87)
Controlabilitate şi accesibilitate (87).Observabilitate (92).Calculul comenzii de tip Dirac (94)
Calculul comenzii de tip Heaviside (11o).

Cap.X : Pilotul automat (115)
Calculul regulatorului (115).Reglajul dela ieşire (125).Compensatoare dinamice ; estimatorul de stare (13o).Răspunsul la comenzi ; decuplarea comenzilor (136).

Cap.XI : Optimizare şi performanţe (141)
Ecuaţia lui Euler (141).Multiplicatorii lui Lagrange (145).Condiţii la limită (148).Ecuaţia Hamilton-Jacobi (15o).Ecuaţia matricială Riccati (151).Proiectarea liniar-patratică (157).Reglajul in cazul perturbaţiilor persistente (159).Principiul lui Pontriaghin (164).Minimizarea consumului de combustibil (172).

Cap.XII : Reprezentarea în timp discret (175)
Sisteme liniare,constante (175).Transformata "z "(177).
Un exemplu de reglaj în timp discret (179).

Cap.XIII : Sisteme aleatoare (181)
Preliminarii (181).Covarianţa şi corelaţia (189).
Sisteme aleatoare staţionare,de ordinul II (191).
Filtraj şi predicţie (194).Filtrul Kalman (196).
Formularea problemei reglajului (199).

Cap. XIV : Construirea modelelor ; identificare (2o2).
Modele pentru zborul de croazieră (2o2).Un model pentru aterizare (2o9).Construirea modelului din rezultatele măsrătorilor(211).Determinarea matricei exponenţiale(213).Estimarea stărilor incerte (216).

Cap. XV : Elemente de avionică (218)
Introducere (218).Conducerea AZ după programul de zbor (219).Giroscopul (223).Accelerometrul (227).
Platforma inerţială (232).Sisteme de radionavigaţie (238).Sisteme de ghidaj la aterizare (244).
Tendinţe în avionică (246).

programat (87)
ate (87).Observa-
de tip Dirac (94)
ide (110).

glajul dela ieşi-
; estimatorul de
i ; decuplarea oc-

)
licatorii lui La-
s (148).Ecuaţia
matricială Riccati
tică (157).Reglajul
tente (159).Princi-
imizarea consumului

(175)
).Transformata "z" (177).
iscret (179).

şi corelaţia (189).
le ordinul II (191).
ltrul Kalman (196).
ii (199).

ificare (202).
ieră (202).Un model
uirea modelului din
.Determinarea matricei
tărilor incerte (216).

AZ după programul de
ccelerometrul (227).
iteme de radionaviga-
a aterizare (244).

CAPITOLUL I.

Introducere

Avioanele, rachetele, elicopterele, sateliţii, etc. le includem într-o clasă denumită "aparate de zbor", în continuare notată prescurtat cu AZ. Ecuaţiile de mişcare ale unui AZ conduc, în general, la un model matematic diferenţial, neliniar. Presupunem că ecuaţiile au fost aduse la forma

$$\boxed{\dot{X} = f(X, U, t)} \qquad I - 1$$

unde X este starea, U comanda, iar t timpul. Starea X este un vector coloană cu n componente scalare reale. Utilizînd notaţia produsului scalar $\langle | \rangle$, vom nota în continuare vectorii linie prin $\langle |$, iar vectorii coloană prin $| \rangle$. Aşadar :

$$X = | X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n \rangle$$

unde stările X_i pot fi viteze, viteze unghiulare, etc, ale AZ, dar şi ale elementelor de acţionare din AZ ca: motoare electrice, motoare hidraulice, etc. Comanda U este un vector cu m componente scalare reale

$$U = | U_1, U_2, \ldots\ldots, U_m \rangle$$

care pot fi = tracţiune, profundor, direcţie, eleroane, flapsuri, spoilere, canarduri, etc. Evident f este o aplicaţie vector coloană

$$f = | f_1, f_2 \ldots\ldots, f_n \rangle$$

Scrise desfăşurat, ecuaţiile I - 1 ar arăta astfel:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= f_1(X_1 \ldots\ldots, X_n; U_1, \ldots\ldots, U_m ; t) \\
\dot{X}_2 &= f_2(X_1 \ldots\ldots, X_n; U_1, \ldots\ldots, U_m ; t) \\
&\vdots \\
\dot{X}_n &= f_n(X_1 \ldots\ldots, X_n; U_1, \ldots\ldots, U_m ; t)
\end{aligned} \qquad I - 2$$

unde U_i şi X_j sînt funcţii de t.

Echipajul nu cunoaşte direct starea AZ, ci prin intermediul aparaturii de bord. Cu ajutorul aparaturii de bord se efectuează starea AZ, astfel încît putem defini "ieşirea" drept "măsurarea stării"

$$Y = g(X)$$

.//.

unde

$$Y = \langle Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_p \rangle$$
$$\varepsilon = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_p \rangle$$

Uneori aparatura de bord citeşte nu numai stări, ci şi comenzi, în care caz Y este funcţie şi de U.

Presupunem că ecuaţia I-1 îndeplineşte condiţiile lui Lipschitz, astfel încît pentru o condiţie iniţială $X(t_0)=X_0$, pentru $t > t_0$ soluţia există şi este unică. De asemenea presupunem că AZ. este în situaţia unui zbor de durată suficient de scurtă pentru ca să considerăm că f nu depinde explicit de t. De asemenea, de exemplu pentru un zbor de croazieră de durată suficient de mică, programul de zbor poate fi dat prin :

$$X_0 = \text{constant} \; ; \quad U_0 = \text{constant} .$$

Din cauza perturbaţiilor la care este supus AZ, starea este descrisă de

$$X = X_0 + x$$
$$U = U_0 + u$$

unde x şi μ sînt presupuse suficient de mici (ipoteza perturbaţiilor mici). Admitem că f este dezvoltabilă în serie în jurul punctului (X_0, U_0) şi avem =

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u_0} u + h(x,u) \qquad I-3$$

unde

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_0} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{x_0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{x_0} & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_{x_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{x_0} \end{bmatrix} = A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbb{C})$$

unde A este o matrice cu n linii şi n coloane, considerată pe corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$. De asemenea

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u_0} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right|_{u_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right|_{u_0} \\ \vdots & & \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right|_{u_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right|_{u_0} \end{bmatrix} = B \in \mathcal{M}(n,m,\mathbb{C})$$

Evident, matricele A şi B sînt constante. În cazul în care $r(x,u)$ poate fi neglijat în I-3, rezultă sistemul în primă aproximaţie

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad I-4$$

.../...

Aceasta este un sistem liniar, constant, diferențial. Dacă și citirea stărilor permite o liniarizare similară, atunci avem:

$$y = Cx \quad ; \quad C \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{C})$$

ecuațiile complete devin acum :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad \text{I-5}$$

Interpretarea fizică este următoarea : cînd AZ execută programul (X_0, U_0) cu stări și comenzi fixate, avem $x = 0$ și $u = 0$, ceeace verifică ecuațiile I-5. In momentul apariției unei perturbații rezultă o abatare dela program $x \neq 0$ și urmează a determina o comandă μ care readuce AZ la program. In general această comandă nu este unică, deci urmează a alege acea comandă care realizează o anumită "performanță" a AZ.

O altă interpretare este următoarea : AZ execută programul (X_0, U_0) dar este necesar să treacă la alt program $(\tilde{X}_0, \tilde{U}_0)$, în care caz se caută comanda care realizează această trecere, de exemplu, dela zbor de croazieră la panta de aterizare, etc.-

CAPITOLUL II,

Stabilitate.

Considerăm din nou ecuația I-3, ținînd seama și de rest, rescrisă sub forma :

$$\dot{x} = \varphi(x, u) \qquad \text{II-1}$$

Ne interesează acum următoarea problemă: la $t = t_0$, sub efectul unei perturbații instantanee, AZ este deplasat brusc în $x(t_0) = x_0 \neq 0$; ce se întîmplă dacă în această situație comenzile rămîn fixate (deci $u = 0$) ?. Intuitiv, pot apare trei situații distincte :

1^0 AZ revine la program, cu $u = 0$; spunem atunci că sistemul

$$\dot{x} = \varphi(x, 0) \qquad \text{II-2}$$

este asimptotic stabil.

2^0 - AZ nu revine la program, dar rămîne suficient de aproape de program. Spunem atunci că sistemul II-2 este stabil.

3^0 - AZ se îndepărtează nedefinit dela program. In acest caz sistemul II-2 este instabil.

Observăm că aceste proprietăți caracterizează starea zero, dar depind de timpul inițial t_0 și de condiția inițială $x(t_0)$; pentru un alt timp inițial t_0' sau o altă condiție inițială $x'(t_0)$ proprietățile de stabilitate pot fi altele.

°//°

Formulăm acum, pe scurt, condiţiile de stabilitate date de Liapunov; referirea va fi la starea zero a sistemului :

$$\dot{x} = \varphi(x) \qquad \text{II-3}$$

Cele trei situaţii de mai sus sînt explicitate în modul următor:

1°- Dacă se dă un $\varepsilon > 0$ pentru care există un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît

$$\|x\| < \varepsilon \quad ; \quad \|x_0\| < \delta(\varepsilon)$$

unde x este soluţie a ecuaţiei II-3, cu condiţia iniţială x_0, atunci sistemul II-3 are starea zero stabilă pentru $t > t_0$ şi $x(t_0) = x_0$.

2°- Dacă în plus avem

$$\lim_{t \to \infty} \|x\| = 0$$

atunci starea zero este asimptotic stabilă pentru $t > t_0$ şi $x(t_0) = x_0$

3°- Dacă nici una din condiţiile de mai sus nu se realizează, atunci starea zero este instabilă pentru $t > t_0$ şi $x(t_0) = x_0$ -

Pentru cercetarea stabilităţii Liapunov a dat două metode, expu se sumar în cele ce urmează :

II-1 Metoda I-a a lui Liapunov.

Această metodă se bazează pe cercetarea sistemului

$$\dot{x} = \varphi(x) \qquad \text{II-4}$$

prin analiza sistemului liniar în primă aproximaţie

$$\dot{x} = Ax \qquad \text{II-5}$$

Această metodă este aplicabilă numai cînd restul din I-3 poate fi neglijat. După cum se ştie, orice matrice n x n poate fi adusă la forma canonică Jordan, care conţine blocuri Jordan aşezate pe diagonală. Fiecare bloc Jordan corespunde unei valori proprii a cărei ordine multiplicitate determină dimensiunea blocului Jordan respectiv. Exemple de blocuri Jordan sînt:

$$[\lambda] \; ; \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \; ; \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \; ; \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \; ; \text{ etc.}$$

Dacă o matrice are toate valorile proprii distincte, atunci forma Jordan corespunzătoare are numai blocuri Jordan de ordinul I, deci este diagonalizabilă scalar. Dacă există valori proprii cu un ordin de multiplicitate mai mare ca unu, atunci poate apare un bloc Jordan de acel ordin. Mulţimea valorilor proprii (spectrul) unei matrice A o notăm $\sigma_p A$, dar specificăm şi dimensiunile blocurilor

.//.

Jordan. De exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad Sp\,A = \{1, 1, 1\}$$

Aceleaşi valori proprii le posedă şi matricea următoare, dar cu un bloc Jordan de ordinul doi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \{1, \overset{(2)}{1}\}$$

Soluţiile elementare ale ecuaţiei omogene II-5 le denumim "moduri". Pentru fiecare valoare proprie λ se asociază blocul Jordan de ordinul corespunzător. Atunci, pentru un bloc Jordan de ordinul k modurile sînt de forma:

$$x_m(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{k-1} t^{k-1}) e^{\lambda t}$$

unde λ este valoarea proprie corespunzătoare. Din punctul de vedere al stabilităţii întîlnim următoarele cazuri:

1^0- Sistemul II-5 este asimptotic stabil dacă (şi numai dacă) partea reală a tuturor valorilor proprii este negativă:

$$Re\,\lambda_i < 0 \quad ; \quad \lambda_i \in Sp\,A$$

Într-adevăr, în acest caz, pentru orice K avem

$$\lim_{t \to \infty} x_m(t) = 0 \qquad \text{II-6}$$

2^0- Dacă măcar una din valorile proprii ale matricei A are parte reală pozitivă, atunci sistemul II-5 este instabil, deoarece modul respectiv nu mai este mărginit cînd $t \to \infty$

3^0- Dacă există valori proprii cu partea reală nulă, atunci sînt posibile două cazuri :

a) $Re\,\lambda = 0$, dar ordinul de multiplicitate este K=1 ; atunci sistemul II-5 este stabil, dar nu asimptotic. Într-adevăr, pentru acest caz avem $x_m(t) < \infty$, adică rămîne mărginit.

b) $Re\,\lambda = 0$, dar $k > 1$; atunci sistemul este instabil, deoarece $x_m(t)$ nu mai rezultă mărginit pentru $t \to \infty$

Cazurile 1 şi 2 transferă proprietatea de stabilitate respectivă şi sistemului II-4, adică celui neliniar, într-o vecinătate a lui $x = 0$, mai exact într-o sferă de rază H astfel încît $\|x\| \leq H$, în interiorul căreia restul $\varphi(x)$ poate fi neglijat. Pentru cazul 3,

.../.

cînd măcar una din valorile proprii are $\mathcal{R}e\lambda=0$, în general metoda I-a a lui Liapunov nu mai este aplicabilă, deoarece încep să aibă influență termenii neliniari din r(x)

Exemple:

1. Sistemul neliniar $\begin{cases} \dot{x}_1=-x_1+x_2+2x_1^4-x_2^6 \\ \dot{x}_2=x_1-3x_2+11x_2^4 \end{cases}$

admite sistemul liniar în prima aproximație:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; \quad A= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Această matrice are valorile proprii

$$Sp\,A = \{-2+\sqrt{2}\ , -2-\sqrt{2}\}$$

ambele reale și negative. In consecință starea zero a sistemului neliniar este asimptotic stabilă.

2. Sistemul neliniar $\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2^3 \end{cases}$

admite sistemul liniar în primă aproximație:

$$\dot{x}_1 = -4x_2 \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad Sp\,A = \{\pm i\sqrt{12}\}$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1$$

Cele două valori proprii având partea reală nulă, metoda I-a a lui Liapunov nu este aplicabilă. Cu ajutorul metodei a II-a a lui Liapunov, vom vedea că acest sistem are starea zero asimptotic stabilă.

II-2 Metoda a II-a a lui Liapunov.

Se numește "pozitiv definită" orice funcție V(x) care este continuă și care pentru orice $x\neq 0$ îndeplinește condiția

$$V(x) > 0$$

iar în interiorul sferei de rază H avem V(x)=0 numai pentru $\|x\|=0$

In plus V(x) este derivabilă, deci avem

$$\dot{V}(x) = \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i \qquad \text{II-7}$$

notăm : $$\nabla V = \left| \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \right>$$

și atunci II-7 devine:

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V | \dot{x} \rangle$$

.//.

Ținînd seamă de II-4 rezultă:

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V | \varphi \rangle \qquad \text{II-8}$$

Numim această derivată " derivata de sistem". Putem formula acum teorema de stabilitate a lui Liapunov:

Dacă sistemul II-4 este astfel încît se poate găsi o funcție pozitiv definită $V(x)$, a cărei derivată de sistem este negativ definită sau nulă, atunci starea zero a sistemului II-4 este stabilă. Sistemul este asimptotic stabil dacă $V(x) \geq 0$, $V(0)=0$, $\dot{V}(x) < 0$ și $\dot{V}(0)=0$ numai pentru $x=0$.

Starea zero a sistemului II-4 este instabilă dacă:

1) $V(x) > 0$

2) în domeniul $V(x) > 0$ funcția $V(x)$ este mărginită.

3) în domeniul $V(x) > 0$ derivata de sistem $\dot{V}(x)$ este pozitiv definită.

Exemple:

1. Reluăm exemplul

$$\dot{x}_1 = -4x_2 - x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - x_2^3$$

Considerăm funcția Liapunov $V(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2$. Această funcție este pozitiv definită. Calculăm derivata de sistem :

$$\dot{V}(x) = 6x_1\dot{x}_1 + 8x_2\dot{x}_2 = -(6x_1^4 + 8x_2^4) < 0$$

In plus avem $\dot{V}(x) = 0$ pentru $x=0$, deci sistemul este asimptotic stabil.

2. Se dă sistemul :

$$\dot{x}_1 = -x_1x_2^4$$

$$\dot{x}_2 = x_1^4 \cdot x_2$$

Alegem funcția Liapunov $V(x) = x_1^4 + x_2^4$. Calculăm derivata de sistem :

$$\dot{V}(x) = 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2^3\dot{x}_2 = 0$$

starea zero este stabilă .

3 - Se dă sistemul

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2$$

.//.

Pentru funcţia $V(x)=\frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + \frac{1}{3}x_2^3$ domeniul $V(x)>0$ este dat de $x_1>0$, $x_2>0$. Derivata de sistem este

$$\overset{\circ}{V}(x)=(x_1^2 + x_2)^2 + (x_1 + x_2^2)^2 > 0$$

deci starea zero este instabilă. La aceeaşi concluzie se ajunge şi cu metoda I-a, deoarece

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad S_pA=\{1,-1\}$$

CAPITOLUL III.

Noţiuni elementare de teoria distribuţiilor

III. 1. Introducere.

Considerăm din nou sistemul diferenţial, liniar şi constant:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \text{III-1}$$

şi ne punem următoarea problemă : pentru $t<t_0$, AZ urmează programul de zbor deci avem $x(t<t_0)=0$. La momentul $t=t_0$ apare o perturbaţie cu efect instantaneu şi avem $x(t_0)\neq 0$ şi în continuare $x(t>t_0)\neq 0$. Aşadar starea este descrisă de o funcţie care se anulează pentru $t<t_0$, iar în punctul t_0 are un salt (discontinuitate de specia întîia). Ne propunem atunci ca funcţia să fie o soluţie pentru ecuaţia diferenţială III-1, inclusiv în punctul de salt. Aşadar este necesară o generalizare a derivatei , astfel încît să poată fi calculată şi în punctul de salt. Vom numi această derivată "derivata în sens distribuţii", definită în paragrafele care urmează.

III-2. Spaţii fundamentale

Considerăm funcţiile φ : $R\to C$ notate $\varphi(t)$, care au următoarele proprietăţi:

1^0. au suport compact; pe axa reală aceasta revine la faptul că orice $\varphi(t)$ are suport mărginit şi închis;

2^0. sînt indefinit derivabile, $\varphi\in C^\infty$.

Mulţimea acestor funcţii o vom nota cu $\mathcal{D}$. Orice constantă $a\neq 0$ nu aparţine lui $\mathcal{D}$ (deoarece nu are suport compact), dar avem $0\in\mathcal{D}$. Un exemplu de $\varphi\in\mathcal{D}$ este:

$$\varphi(t;a,b)=\begin{cases} e^{\frac{ab}{(t-a)(t-b)}} & \text{pentru } t\in[a,b]\ ;\ a\in[a,b]\\ 0 & \text{pentru } t\notin[a,b]\end{cases}$$

Se observă că suportul acestei funcţii este compactul $[a,b]\subset R$. De asemenea se verifică faptul că este indefinit derivabilă.

Cu scalari din C, spaţiul $\mathcal{D}$ poate fi organizat ca spaţiu vectorial, deoarece

$$a,b\in C\ ;\ \varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}\ ;\ a\varphi_1+b\varphi_2\in\mathcal{D}$$

.//.

Axiomele de spaţiu vectorial se verifică fără dificultate. In plus, $\mathcal{D}$ se organizează ca spaţiu Banach (vectorial, normat, complet).

Produsul a două funcţii din $\mathcal{D}$ este şi el în $\mathcal{D}$; într-adevăr, dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ atunci $\varphi_1 \varphi_2$ are suport compact (intersecţia celor două suporturi) şi este indefinit derivabil.

Dacă $\psi \in C^\infty$ şi are suport oarecare, atunci produsul $\psi\varphi$, cu $\varphi \in \mathcal{D}$, este indefinit derivabil şi are suport compact, deci $\psi\varphi \in \mathcal{D}$. Aşadar, multiplicatorii pe $\mathcal{D}$ sînt funcţiile indefinit derivabile şi cu suport oarecare. Menţionăm că dacă $\psi\varphi = 0$ atunci se poate ca simultan $\psi \neq 0$ şi $\varphi \neq 0$, ceeace are loc cînd intersecţia celor două suporturi este vidă.

Uneori nu avem nevoie ca φ să fie indefinit derivabilă, ci numai de m ori derivabile; vom nota atunci spaţiul corespunzător cu $\mathcal{D}^m$. De asemenea, uneori funcţiile φ sînt conţinute într-o mulţime deschisă, nevidă, $T \subset R$; în acest caz spaţiul corespunzător va fi notat cu $\mathcal{D}_T$.

In aplicaţii mai apare frecvent spaţiul funcţiilor indefinit derivabile care descresc rapid la infinit. Acest spaţiu îl notăm cu $\mathcal{S}$. Funcţiile $\varphi \in \mathcal{S}$, pentru $|t| \to \infty$ tind la zero, împreună cu derivatele lor, de orice ordin, mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{|t|}$. Un exemplu de funcţie din $\mathcal{S}$ este

$$\varphi(t) = e^{-t^2}$$

Se verifică fără dificultate că $\varphi \in \mathcal{S}$, dar $\varphi \notin \mathcal{D}$, din cauză că nu are suport compact. Orice $\varphi \in \mathcal{D}$ aparţine şi lui $\mathcal{S}$, deoarece se anulează la infinit (are suport compact).

III- 3. Distribuţii.

Funcţionalele liniare şi continue

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$$

se numesc distribuţii. Funcţionalele liniare şi continue

$$g : \mathcal{D}^m \to \mathbb{C}$$

se numesc distribuţii de ordin finit. Funcţionalele liniare şi continue

$$h : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$$

se numesc distribuţii temperate. Dat fiind scopul aplicativ, ne referim la aceste tipuri de distribuţii.

Funcţionalele de tipul f, g, h formează fiecare cîte o mulţime, pe care o denumim "dual". Astfel notaţia $f \in \mathcal{D}'$ arată că funcţionala f este o distribuţie din $\mathcal{D}'$, respectiv $g \in \mathcal{D}^{m\prime}$ şi $h \in \mathcal{S}'$. Unui

.//.

operator A care acţionează din $\mathcal{D}'$ în $\mathcal{D}'$, adică $A:\mathcal{D}'\to\mathcal{D}'$, îi asociem operatorul adjunct care acţionează din $\mathcal{D}$ în $\mathcal{D}$. Astfel vom defini operaţii $\mathcal{D}'\to\mathcal{D}'$ prin adjunctul $\mathcal{D}\to\mathcal{D}$.

Cel mai important exemplu de distribuţie este distribuţia lui Dirac, definită prin funcţionala

$$\varphi(t) \xrightarrow{\delta} \varphi(0) \quad \text{pentru orice } \varphi\in\mathcal{D}$$

Distribuţiile mai pot fi notate şi astfel:

$$\delta[\varphi(t)]=\varphi(0) \quad \text{sau} \quad \langle\delta(t),\varphi(t)\rangle=\varphi(0)$$

In cele ce urmează vom prefera această din urmă notaţie.

III.4. Distribuţii regulate.

Funcţiile pot genera distribuţii, de exemplu prin funcţionala $\langle f(t),\varphi(t)\rangle=\int_R f\varphi \quad ,\forall\varphi\in\mathcal{D}$

Aceasta este o formă biliniară, fiind deci liniară în f; dacă este şi continuă, atunci funcţionala respectivă este o distribuţie din $\mathcal{D}'$. Aceasta nu are loc, în general, pentru orice funcţie $f:R\to R$. Dacă $f(t)$ este însă local integrabilă, adică dacă este absolut integrabilă pe orice interval mărginit $(a,b)\subset R$, atunci integrala converge pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$, datorită suportului compact al lui φ şi a faptului că φ este continuă. Clasa distribuţiilor generate de funcţii local integrabile este foarte importantă în aplicaţii. Distribuţiile generate de funcţii le vom numi "distribuţii regulate" sau "distribuţii de tip funcţie" sau chiar prescurtat "funcţie". Distribuţiile care nu sînt de tip funcţie le vom numi "distribuţii singulare" sau prescurtat "distribuţii". De exemplu, să arătăm că $\delta(t)$ este distribuţie şi nu poate fi funcţie. Dacă δ ar fi funcţie atunci ar trebui să existe o funcţie $x(t)$ pentru care să aibe loc

$$\int_R x\varphi=\varphi(0)$$

In particular, să considerăm în $\mathcal{D}$ şirul de funcţii:

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-t^2}\right) & \text{pentru } |t|<\frac{1}{n}\\ 0 & \text{pentru } |t|>\frac{1}{n}\end{cases} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

Observăm că $\varphi_n\in\mathcal{D}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Înlocuind în precedenta rezultă:

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x(t)\exp\left(-\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-t^2}\right)dt=\varphi_n(0)=\frac{1}{e}$$

o//o

pentru price $n \in \mathbb{N}$. Se obţine o contradicţie, deoarece membrul stîng tinde de zero cînd n creşte indefinit, iar membrul drept este o constantă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Aşadar, distribuţia δ a lui Dirac nu este funcţie.

Funcţia "treaptă" a lui Heaviside se defineşte astfel:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

şi se observă că are un salt unitar în origine.

Această funcţie este local integrabilă şi generează "distribuţia" Heaviside după funcţionala:

$$\langle h(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\,dt \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

unde cu $\mathbb{R}_+$ am notat semiaxa pozitivă.

III-5 Suportul unei distribuţii.

Spunem că distribuţia f se anulează pe mulţimea deschisă T dacă

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_T$$

Complementara reuniunii tuturor mulţimilor deschise, pe care distribuţia f se anulează, se numeşte suportul distribuţiei f. Din definiţie se observă că suportul unei distribuţii f este o mulţime închisă. Distribuţia lui Dirac $\delta(t)$ are ca suport punctul $t=0$, iar pentru $t \neq 0$ se anulează; se spune că distribuţia Dirac este concentrată în punctul $t=0$.

Suportul distribuţiei Heaviside este conţinut în $\mathbb{R}_+$, iar pe $\mathbb{R}_-$ se anulează.

In cazul funcţiilor continue, distribuţiile generate de acestea au suportul funcţiilor care le-au generat.

III-6. Egalitatea a două distribuţii.

Două distribuţii sînt egale pe mulţimea deschisă T dacă pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}_T$ avem

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \quad \text{sau} \quad \langle f - g, \varphi \rangle = 0$$

O distribuţie f poate fi egală, pe o mulţime deschisă T, cu o funcţie. De exemplu, distribuţia Dirac este egală cu funcţia $\delta(t) \equiv 0$, pe mulţimea tuturor punctelor $t \neq 0$.

Pentru distribuţiile de tip funcţie, egalitatea distribuţiilor nu implică egalitatea funcţiilor care le-au generat, deoît dacă funcţiile sînt continue. Funcţiile egale, "aproape peste tot" generează o aceeaşi distribuţie. De exemplu:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \tilde{h}(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

-//-

generează o aceeaşi distribuţie : $\int_{R_+} \varphi$, ca şi funcţia

$$\overset{-}{h}(t) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t < 0 \text{ şi } t \in N \\ 1 \text{ pentru } t > 0 \text{ (dar } t \notin N). \end{cases}$$

care se anulează pe R_+ într-o infinitate de puncte (numerele naturale). Egalitatea "aproape peste tot" este evidentă.

III.7. Multiplicatorii pe $\mathcal{D}'$

Multiplicatorii pe $\mathcal{D}'$ sînt funcţiile indefinit derivabile $\psi \in C^\infty$, cu suport oarecare. Prin definiţie, dacă $\psi \in C^\infty$ şi $f \in \mathcal{D}'$, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ avem

$$\langle \psi f, \varphi \rangle = \langle f, \psi \varphi \rangle \qquad \text{III-2}$$

Am arătat anterior că $\psi\varphi \in \mathcal{D}$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$. Aşadar, operatorul de multiplicare care acţionează $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ prin $f \to \psi f$ este adjunctul operatorului liniar şi continuu $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ prin $\psi \to \psi\varphi$.

Produsul ψf poate fi nul chiar dacă $\psi \neq 0$ şi $f \neq 0$, de exemplu dacă suporturile sînt disjuncte, sau ca în următorul exemplu: $\alpha(t) \in C^\infty$, $\delta(t) \in \mathcal{D}'$, dar $\alpha(0) = 0$. Atunci, conform definiţiei :

$$\langle \alpha\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha\varphi \rangle = \alpha(0)\varphi(0) = 0 \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

In particular:

$$\langle t\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, t\varphi \rangle = 0 \qquad \text{III-3}$$

Dacă a este o constantă, atunci $a\delta = 0$ nu admite decît $a = 0$ deoarece:

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a\varphi(0) = 0 \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

de unde rezultă $a = 0$

Constantele sînt şi ele multiplicatori, deoarece $a \in C^\infty$; produsul unei distribuţii cu o constantă este atunci definit prin III-2. In plus, în baza liniarităţii avem

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle = a\langle f, \varphi \rangle \quad ; \forall f \in \mathcal{D}' \; ; \varphi \in \mathcal{D}$$

Pentru funcţiile local integrabile avem:

$$\langle \psi f, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle = \int_R (\psi f)\varphi = \int_R f(\psi\varphi)$$

ceeace este evident.

III-8. Translaţia unei distribuţii

Fie $f \in \mathcal{D}'_T$ şi $\tau \in \mathbb{R}$; translatata $T-\tau$ a mulţimii $T \subset \mathbb{R}$ este deschisă odată cu T. Pentru $\varphi \in \mathcal{D}_T$ considerăm translaţia $\varphi(t) \longmapsto \varphi(t+\tau)$. Orice $\tau \in \mathbb{R}$ admite ca invers pe $-\tau \in \mathbb{R}$, care în $\mathcal{D}$ operează astfel $\varphi(t) \longmapsto \varphi(t-\tau)$. Prin definiţie:

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle f(t+\tau), \varphi(t) \rangle = \langle f(t), \varphi(t-\tau) \rangle \\ \langle f(t-\tau), \varphi(t) \rangle = \langle f(t), \varphi(t+\tau) \rangle \end{array}} \quad \text{sau} \qquad \text{III- 4}$$

Aceste formule sînt valabile şi pe R.

De exemplu, să notăm cu $\delta(t-\tau)$ distribuţia lui Dirac cu suportul în τ ; putem însă folosi şi notaţia δ_τ. Conform definiţiei avem :

$$\langle \delta_\tau, \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t-\tau), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t+\tau) \rangle = \varphi(\tau)$$

deoarece funcţionala duce în t=0, conform definiţiei distribuţiei Dirac. Pentru suporturi disjuncte ale lui δ putem considera sume de forma

$$\langle \sum_k^\infty \delta_k , \varphi \rangle = \sum_k^\infty \langle \delta_k , \varphi \rangle = \sum_k^\infty \varphi(k) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Datorită suportului compact al lui φ , pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ suma este finită; se spune că seria este "local finită"

Distribuţiile pentru care avem

$$\langle f(t+\tau), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle \qquad \tau \in \mathbb{R} \text{ , constant}$$

sînt distribuţii periodice, de perioadă τ.

III-9. Derivarea distribuţiilor.

Operatorul de derivare $D : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ este definit ca adjunctul operatorului - $D : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, adică:

$$f \in \mathcal{D}' ; \varphi \in \mathcal{D} \quad ; \langle Df, \varphi \rangle = \langle f, -D\varphi \rangle \qquad \text{III-5}$$

Pentru a deosebi derivarea distribuţiilor de derivarea funcţiilor vom nota derivata unei distribuţii cu Df şi derivarea unei funcţii cu φ' , aşadar

$$\boxed{\langle Df, \varphi \rangle = \langle f, -\varphi' \rangle}$$

Să calculăm derivata distribuţiei Heaviside ; avem

$$\langle Dh, \varphi \rangle = \langle h, -\varphi' \rangle = -\int_R h\varphi' = -\int_0^\infty \varphi' = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Subînţelegînd funcţionala, rezultatul îl putem scrie şi astfel

$$\boxed{Dh = \delta}$$

.//.

Pentru funcţii derivabile $\psi(t)$ se deduce :

$$< D\psi, \varphi > = < \psi, -\varphi' > = -\int_R \psi\varphi' = -\psi\varphi\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_R \psi'\varphi = < \psi', \varphi > .$$

In consecinţă :

$$D\psi = \psi'$$

adică derivata în sens distribuţii a funcţiilor derivabile coincide cu derivata clasică a funcţiei.

Să considerăm acum o funcţie $f(t)$ derivabilă peste tot, cu excepţia punctului $t = \tau$ unde are un salt σ ,adică:

$$f(\tau+0) - f(\tau-0) = \sigma$$

Să calculăm derivata în sens distribuţii ; avem

$$< Df(t), \varphi(t) > = -\int_R f\varphi' = -f\varphi\Big|_{-\infty}^{\tau-0} - f\varphi\Big|_{\tau+0}^{\infty} - \int_R f'\varphi =$$

$$= \left[f(\tau+0) - f(\tau-0) \right] \varphi(\tau) + < f', \varphi > = < f' + \sigma\delta_\tau, \varphi >$$

Prescurtat putem scrie:

$$\boxed{Df = f' + \sigma\delta_\tau}$$

Prin urmare peste tot unde f este derivabilă, derivata funcţiei corespunde cu derivata distribuţiei, iar în punctul de salt apare $\sigma\delta_\tau$, adică valoarea saltului înmulţită cu distribuţia Dirac cu suportul în punctul de salt.

Acelaş *rezultat* se obţine dacă punem pe $f(t)$ în forma:

$$f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pentru } t < \tau \\ f(t) + \sigma h_\tau & \text{pentru } t > \tau \end{cases}$$

unde h_τ este treapta Heaviside cu saltul în punctul τ

Derivatele succesive ale lui δ se calculează în modul următor:

$$< D\delta, \varphi > = < \delta, -\varphi' > = -\varphi'(0)$$

$$< D^2\delta, \varphi > = < \delta, \varphi'' > = \varphi''(0)$$

şi în general : $< D^n\delta, \varphi > = < \delta, (-1)^n \varphi^{(n)} > = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$

Dacă $\psi \in C^\infty$ şi $f \in \mathcal{D}'$, rezultă :

$$< D(\psi f), \varphi > = < \psi f, -\varphi' > = < f, -\psi\varphi' > = < f, \psi'\varphi - (\psi\varphi)' > =$$

$$= < \psi' f + \psi Df, \varphi > \qquad \text{sau:}$$

$$D(\psi f) = \psi' f + \psi Df$$

adică regula uzuală de derivare a produsului.

.//.

Orice distribuţie este derivabilă; orice distribuţie admite o primitivă. Primitiva este analoagă cu primitiva funcţiilor, aşadar dacă

$$\langle Dg, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

atunci g este o primitivă a lui f.

Derivata unei constante a este zero, deoarece $a \in C^\infty$ şi avem

$$\langle Da, \varphi \rangle = \langle a, -\varphi' \rangle = -\int_R a\varphi' = -a\int_R \varphi' = -a\varphi\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

** deoarece φ are suport compact şi deci φ se anulează la infinit. Atunci avem şi:

$$D(g+a) = Dg = f$$

aşadar toate primitivele diferă printr-o constantă aditivă.

Deoarece derivarea în sens distribuţii are o mare aplicativitate, vom da în continuare cîteva exemple ilustrative.

1. Să se derive funcţia

$$f(t) = t - [t] \quad \text{pentru} \quad t > 0,$$

unde $[t]$ este partea întreagă a lui t. Aceasta este o funcţie de tipul "semnal în dinţi de fierăstrău". Se mai poate scrie şi astfel:

$$f(t) = ht - \sum_1^\infty h_k \quad \text{unde } K \in N \text{ şi } h_k \text{ treapta Heaviside cu saltul în punctul K.}$$

Derivata se calculează direct după regulile de derivare de mai sus, aşadar:

$$Df = t\delta + h - \sum_1^\infty \delta_k$$

Am văzut însă că $t\delta = 0$ deci

$$Df = h - \sum_1^\infty \delta_k \quad \text{(seria este local finită)}$$

2. Să se determine densitatea de probabilitate pentru variabila aleatoare discretă:

$$\xi : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Funcţia de repartiţie este

$$F(x) = \sum_1^n p_i h_i$$

adică o funcţie în scară şi rezultă

$$F(x > n) = 1$$

Densitatea de probabilitate se defineşte ca derivată în sens distribuţii a funcţiei de repartiţie, deci:

$$Df = \sum_1^n p_i \delta_i$$

3. Să se găsească soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$Dx = \delta$$

avem:

$$\langle Dx, \varphi \rangle = \langle x, -\varphi' \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \langle h+a, -\varphi' \rangle$$

aşadar:

$$x = h + a$$

unde a este distribuţia generată de o constantă arbitrară.

III.1o. Distribuţii cu suport pozitiv.

Dacă un AZ. efectuează un program de zbor fără abatere pînă la $t = t_0$, iar în momentul $t=t_0$ o perturbaţie instantanee îl scoate din program, atunci pentru $t < t_0$ starea sa este zero. Aşadar, în aplicaţii sînt necesare distribuţii care au suport mărginit la stînga. In particular, dacă $t_0 = 0$, considerăm distribuţii care au suportul în R_+ (semiaxa pozitivă). Spaţiul acestor distribuţii îl notăm cu $\mathcal{D}'_+$.

Ecuaţia de mai sus

$$Dx = \delta$$

are soluţie unică în $\mathcal{D}'_+$ şi anume

$$x = h$$

deoarece orice constantă are ca suport toată axa reală, deci singura constantă din $\mathcal{D}'_+$ este zero.

III.11. Produsul de convoluţie.

Să reamintim întîi unele proprietăţi ale produsului de convoluţie al funcţiilor; după cum ştim :

$$F(t) = \int_R f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Se observă imediat că produsul de convoluţie nu există decît în anumite condiţii; de exemplu, dacă f(sau g) are suport compact, atunci integrala se reduce la

$$F(t) = \int_a^b f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

şi dacă f şi g sînt integrabile pe $[a,b]$ atunci produsul există. Dacă f şi g sînt local integrabile şi au suportul mărginit de aceeaşi parte, atunci produsul există. De exemplu, dacă f(t) şi g(t) au suportul mărginit la stînga în punctul t=o, atunci integrala se reduce la

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

deoarece $f(\tau)$ se anulează pentru $\tau < 0$, iar $g(t-\tau)$ se anulează pentru $\tau > t$. Produsul de convoluţie (dacă există) este comutativ, adică pentru $\sigma = t - \tau$ avem

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = -\int_t^0 f(t-\sigma)\, g(\sigma)\, d\sigma = \int_0^t f(t-\sigma)\, g(\sigma)\, d\sigma$$

Suportul lui f este cuprins în închiderea sumei suporturilor lui f şi g

$$\operatorname{spt} F \subset \left[\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g\right]$$

.//.

Produsul de convoluţie al distribuţiilor se defineşte cu funcţionala compusă:

$$\langle f*g, \varphi\rangle = \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t+\tau)\rangle\rangle = \langle g(t), \langle f(\tau), \varphi(t+\tau)\rangle\rangle$$

Dacă $\langle g(\tau), \varphi(t+\tau)\rangle = \psi(t) \in \mathcal{D}$, atunci $\langle f(t), \psi(t)\rangle$ este o distribuţie şi produsul există. Acest produs există cel puţin în unul din următoarele cazuri

1 - f sau g are suport compact ;

2 - f şi g au suportul mărginit de aceeaşi parte.

De exemplu, produsul între o constantă a şi treapta Heaviside h(t) nu converge, deoarece :

$$\langle a*h, \varphi\rangle = \langle a, \langle h(t), \varphi(t+\tau)\rangle\rangle = \langle a, \int_0^\infty \varphi(t+\tau)\,d\tau\rangle =$$

$$= \int_R a\,dt \int_0^\infty \varphi(t+\tau)\,d\tau = a\int_R dt \int_0^\infty \varphi(t+\tau)\,d\tau$$

Deoarece a şi h sînt local integrabile se poate calcula direct

$$\int_R a\,h(t-\tau)\,d\tau = a\int_{-\infty}^{t} d\tau$$

Cu teorema lui Fubini avem

$$a\int_R dt \int_0^\infty \varphi(t+\tau)\,d\tau = a\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_R \varphi(t+\tau)\,dt$$

prin urmare integrala nu converge ; în schimb avem

$$ah*h = a\int_R h(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = a\int_0^t d\tau$$

şi integrala converge, deoarece ah şi h au suportul mărginit de aceeaşi parte. Următoarele formule sînt utile în aplicaţii:

$$h*h = ht \quad ; \quad h*h*h = ht*h = h\frac{t^2}{2} \text{ , etc.}$$

In general produsul de convoluţie nu este asociativ; de exemplu

$$a*(\delta'*h) = a*\delta = a$$

$$(a*\delta')*h = 0*h = 0$$

Produsul de convoluţie arată că δ are proprietatea unităţii; într-adevăr, pentru orice $f\in\mathcal{D}'$ avem :

$$\langle f*\delta, \varphi\rangle = \langle f(t), \langle \delta(\tau), \varphi(t+\tau)\rangle\rangle = \langle f(t), \varphi(t)\rangle$$

Aşadar

$$\delta*f = f$$

In $\mathcal{D}_+$ produsul de convoluţie există întotdeauna, deoarece distribuţiile respective au suportul mărginit la stînga ; în plus, produsul este asociativ şi comutativ, şi are element unitate.

Derivata unei distribuţii se obţine prin produsul de convoluţie cu $D\delta = \delta'$.

Într-adevăr :

$$\langle \delta' * f, \varphi \rangle = \langle f(t), \langle \delta'(\tau), \varphi(t+\tau) \rangle \rangle =$$
$$= \langle f(t), \langle \delta(\tau), -\varphi'(t+\tau) \rangle \rangle = \langle f(t), -\varphi'(t) \rangle = \langle Df, \varphi \rangle$$

De aci rezultă imediat că derivata produsului de convoluţie este

$$D(f * g) = (\delta' * f) * g = Df * g = f * (\delta' * g) = f * Dg$$

adică la derivare se derivă numai unul din termenii produsului.

Produsul cu h reprezintă primitiva (unică) în $\mathcal{D}'_+$ a unei distribuţii $f \in \mathcal{D}'_+$. Într-adevăr, dacă

$$Dg = f$$

atunci

$$h * Dg = (h * \delta') * g = \delta * g = g$$

Convenţional vom nota:

$$\underbrace{h * h * h * \ldots * h}_{n} = h^n$$

şi de asemenea

$$\underbrace{\delta' * \delta' * \ldots * \delta'}_{m} = \delta^m$$

avem $h * \delta' = \delta$; într-adevăr :

$$h * \delta' = h * D\delta = Dh * \delta = Dh = \delta$$

Prin recurenţă obţinem:

$$h^n * \delta^m = h^n * D^m \delta = D^m (h^n * \delta) = D^m h^n$$

Atunci are sens notaţia

$$h^n = \delta^{-n}$$

In general avem

$$\delta^n * \delta^m = \delta^{n+m} \quad , n, m \in \mathbb{Z}$$

Ideea se poate extinde mai departe pentru n, m numere raţionale şi rezultă "derivata de ordin fracţionar".

Considerăm structura de corp a lui R şi formăm polinoame:

$$P = \sum a_i \delta^i \quad , i \in \mathbb{N}$$

Produsul a două polinoame de acest gen este şi el un polinom; în plus avem

$$P * Q = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ sau } Q = 0$$

Rezultă că inelul polinoamelor astfel formate, notat cu $A[R(\delta)]$ este un domeniu de integritate; aşadar poate fi cufundat în corpul fracţiilor de polinoame $K[R(\delta)]$ (sau în $K[C(\delta)]$), unde gradul polinomului poate fi şi negativ. De asemenea, în baza comutativităţii putem "împărţi" în sensul inversului de convoluţie şi avem:

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q} \quad ; \text{ grad } P > \text{grad } Q \; ; \; grad\, R < grad\, Q$$

.//.

unde S este distribuţie (conţine δ numai la puteri pozitive) iar $\frac{R}{Q}$ este funcţie. De asemenea este permisă împărţirea infinită, adică

$$\frac{R}{Q} = T$$

unde T conţine pe δ numai la puteri negative. De exemplu

$$T = \frac{\delta}{\delta' - a\delta} = \delta^{-1} + a\delta^{-2} + a^2\delta^{-3} + \ldots = h\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + \ldots\right) = he^{at}$$

III-12. Algebra $\mathcal{D}'_+$

Din cele de mai sus rezultă că $(\mathcal{D}'_+, +, *)$ este un inel integru comutativ. Într-adevăr:

1. $(\mathcal{D}'_+, +)$ este un grup abelian
2. $(\mathcal{D}'_+, *)$ este un monoid cu unitatea δ
3. Produsul de convoluţie este distributiv:

$$f \ast (g + h) = f \ast g + f \ast h$$

Acest inel nu admite divizori ai lui zero, deci este un domeniu de integritate. În consecinţă el poate fi cufundat în corpul fracţiilor $K[\mathcal{D}'_+]$.

Toate rezultatele referitoare la algebrele comutative, cu element unitate sînt deci valabile şi pentru $\mathcal{D}'_+$. Acesta simplifică considerabil calculele în aplicaţii practice.

III-13. Spaţiul bivectorial $(\mathcal{D}'_+, K, R)$

Formăm vectori notaţi astfel

$$x = \langle x_1, x_2, \ldots x_n \rangle \quad \text{unde } x_i \in \mathcal{D}'_+$$

Se observă imediat că $x' + x'' \in \mathcal{D}'_+(n)$, adică se defineşte adunarea vectorilor componentă cu componentă.

Produsul cu un scalar $\alpha \in \mathcal{D}'_+$ din K se defineşte în mod uzual:

$$\alpha * x = \alpha * \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle \alpha * x_1, \ldots, \alpha * x_n \rangle \in \mathcal{D}'_+(n)$$

Axiomele de spaţiu vectorial se verifică imediat:

1. $\mathcal{D}'_+(n)$ este un grup abelian
2. Pentru orice $x, y \in \mathcal{D}'_+(n)$ şi orice $\alpha, \beta \in K$ avem

$$\alpha * (x+y) = \alpha * x + \alpha * y$$
$$(\alpha+\beta) * x = \alpha * x + \beta * x$$
$$\alpha * (\beta * x) = (\alpha * \beta) * x$$

3. $\delta * x = x$, $\delta \in K$

Să considerăm acum corpul R al numerelor reale (sau C). atunci pentru orice $a, b, c \in R$ avem

$$a(x + y) = ax + ay$$
$$(a+b)x = ax + bx$$
$$a(bx) = (ab)x$$

.//.

Aşadar $\mathcal{D}'_+(\mathcal{R})$ este un spaţiu vectorial şi peste corpul R.

Adunarea în $(\mathcal{D}'_+(\mathcal{R}),K)$ şi adunarea în $(\mathcal{D}'_+(\mathcal{R}),R)$ coincid. In plus, produsul cu un scalar din K şi cu un scalar din R permută, adică avem:

$$a(\alpha * x) = \alpha * (ax), \quad a \in R, \ \alpha \in K, \ x \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{R})$$

Aşadar, $(\mathcal{D}'_+(\mathcal{R}),K,R)$ este un spaţiu bivectorial; această proprietate va fi utilizată în calcule.

III-14. Ecuaţii diferenţiale în $\mathcal{D}'_+$

Considerăm $P = \sum_0^m a_i \delta^{(i)}$, cu $a \in R$ şi $i \in N$

Ecuaţiile diferenţiale de forma

$$P * x = u$$

cu $x,u \in \mathcal{D}'_+$ se rezolvă imediat; se numeşte soluţie elementară a ecuaţiei date, soluţia ecuaţiei:

$$P * x = \delta$$

adică

$$x_e = P^{-1}$$

atunci soluţia ecuaţiei date este

$$x = P^{-1} * u = x_e * u$$

şi verificarea este imediată:

$$P * (P^{-1} * u) = (P * P^{-1}) * u = \delta * u = u$$

Calculul lui P^{-1} se face prin " împărţire", ca în exemplul dela sfîrşitul paragrafului III-12.

Dela o ecuaţie de un ordin $n > 1$ se poate trece întotdeauna la un sistem de ecuaţii de ordinul I (reciproca nu este adevărată). Atunci *considerăm ecuaţia:*

$$Dx = Ax + Bu \qquad \text{sau}$$

$$(\delta' I - \delta A) * x = Bu$$

unde $I \in R^n$ este matricea unitate. Soluţia elementară este dată de

$$(\delta' I - \delta A) * x = I\delta \qquad \text{sau}$$

$$x_e = (\delta' I - \delta A)^{-1}$$

Impărţind în sensul convoluţiei se obţine

$$\frac{1\delta}{1\delta' - \delta A} = I\delta^{-1} + A\delta^{-2} + A^2\delta^{-3} + \ldots = h(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots) = he^{At}$$

unde matricea e^{At} este nesingulară pentru orice A şi pentru orice t. Atunci soluţia ecuaţiei dată este

$$x = he^{At} * Bu = he^{At}B * u$$

Aici am utilizat proprietatea de spaţiu bivectorial. Să verificăm soluţia:

$$Dx = (Dhe^{At}B) * u = (\delta e^{At}B + hAe^{At}B) * u = Bu + hAe^{At}B * u =$$

$$= Ax + Bu$$

Aceasta este soluţia unică (în $\mathcal{D}'_+$).

.//.

Ecuaţiile date în forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad t > 0$$

se rezolvă în modul următor: prelungim pe x şi u pe toată axa, cu $x(t<0) = 0$ şi $u(t<0) = 0$. Atunci $x(t)$ are salt în origine.

Notăm saltul cu x_0 şi avem:

$$Dx = \dot{x} + x_0\delta$$

Inlocuind pe $\dot{x}$ se obţine

$$Dx = Ax + Bu + x_0\delta$$

Repetînd calculul de mai sus rezultă:

$$x(t) = he^{At}x_0 + he^{At}B * u \qquad \text{III-6}$$

unde h este distribuţia Heaviside iar e^{At} multiplicator din C^∞ . Soluţia III-6 va interveni foarte frecvent în aplicaţii ulterioare.

In încheiere dăm cîteva proprietăţi ale matricei he^{At}:

1. $e^{At} \cdot e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$

Egalitatea nu are loc decît cînd produsul este comutativ, deci:

$$e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$$

2. Inversa matricei e^{At} este e^{-At}; într-adevăr, pentru orice t, avem

$$e^{At} \cdot e^{-At} = e^0 = I$$

3. Derivata lui he^{At} rezultă din :

$$D(he^{At}) = (Dh)e^{At} + h(De^{At}) = \delta e^{At} + hae^{At} = \delta I + hAe^{At}$$

deoarece $e^{A0} = I$, iar derivarea uzuală a funcţiei e^{At} se obţine derivînd termen cu termen şi rezultă $Ae^{At} = e^{At}A$

4. Dacă A este nesingulară, primitiva lui he^{At} rezultă prin calcul direct. Intr-adevăr:

$$\delta^{-1} * he^{At} = (he^{At} - Ih)A^{-1} = A^{-1}h(e^{At} - I)$$

Derivînd se obţine verificarea (în $\mathcal{D}'_+$). Cum era de aşteptat, primitiva nu are salt în origine.

CAPITOLUL IV.

Transformata Fourier şi transformata Laplace

IV-1 Transformata Fourier.

Reamintim că pentru funcţiile care posedă transformata Fourier avem:

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad ; \omega \in R$$

şi transformata inversă, dată de integrala improprie (valoare principală Cauchy)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Pentru distribuţiile temperate $f \in \mathcal{S}'$, cu $\varphi \in \mathcal{S}$ avem întotdeauna

$$\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$$

.//.

Transformata Fourier şi inversa ei sînt aplicaţii liniare şi continue $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$; operatorul $\mathcal{F}$ din $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ este definit ca autoadjunctul $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, avem deci :

$$< \mathcal{F}f , \varphi > = < f, \mathcal{F}\varphi >$$

Dacă $f \in \mathcal{S}'$ atunci şi $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}'$. Transformata inversă se defineşte în acelaş mod: astfel dacă $\mathcal{F}f = g$ şi $\mathcal{F}\varphi = \psi$ atunci din formula precedentă se deduce :

$$< \mathcal{F}^{-1} g , \psi > = < g , \mathcal{F}^{-1} \psi >$$

Următoarele formule sînt utile în aplicaţii :

$$\mathcal{F}[D^K f(t)] = (i\omega)^K \mathcal{F}f$$

$$D^k f(t) = \mathcal{F}^{-1}[(i\omega)^K (\mathcal{F}f)(\omega)]$$

De exemplu, pentru K = 1 avem :

$$< D(\mathcal{F}f) , \varphi > = < \mathcal{F}f , -\varphi' > = < f , -\mathcal{F}\varphi' > = < f(t) , -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(\omega) e^{-i\omega t} d\omega >$$

Integrînd prin părţi se obţine :

$$< f(t) , -it \int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega) e^{i\omega t} d\omega > = < -it f(t) , \mathcal{F}\varphi > = < \mathcal{F}[it f(t)] , \varphi >$$

Prin dualitate, pentru orice $K \in \mathbb{N}$ avem

$$\mathcal{F}[(-it)^k f(t)] = D^k (\mathcal{F}f)(\omega)$$

Teorema translaţiei se formulează astfel :

$$\mathcal{F}f(t-\tau) = e^{-i\omega\tau} (\mathcal{F}f)(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t) e^{-i\tau t}] = (\mathcal{F}f)(\omega + \tau)$$

Pentru $K \in \mathbb{N}$ şi $\tau \in \mathbb{R}$ avem :

$$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad \mathcal{F}\delta^K(t-\tau) = (i\omega)^K e^{-i\omega\tau}$$

$$\mathcal{F}(\delta - \tau) = e^{-i\omega\tau} \qquad \mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$$

$$\mathcal{F}\delta^K = (i\omega)^K \qquad \mathcal{F}^{-1}\delta = \frac{1}{2\pi} \; ; \; \mathcal{F}^{-1}(1) = \delta$$

Evident, existenţa produsului de convoluţie este condiţionată de comportarea lui f şi g cînd $|t| \to \infty$

Pentru determinarea transformatei Fourier a distribuţiei Dirac procedeul este următorul :

$$< \mathcal{F}\delta , \varphi > = < \delta , \mathcal{F}\varphi > = < \delta(\omega) , \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt > = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = < 1 , \varphi(t) > \; ; \; \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Aşadar $\mathcal{F}\delta = 1$, aşa cum rezultă din tabelul de mai sus.

Pentru transformata Fourier a funcției treaptă Heaviside observăm următoarele : funcția h(t) nu este absolut integrabilă, deci nu îndeplinește condițiile pentru a avea transformată Fourier Totuși distribuția generată de h(t) posedă transformată Fourier, introdusă (ca și în cazul funcțiilor) făcînd uz de valoarea principală a unei integrale improprii (Cauchy). Definim funcționala liniară $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ conform formulei :

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = V_p \int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Astfel, distribuția $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ coincide cu funcția $\frac{1}{x}$ pentru $x \neq 0$. Să calculăm acum limita

$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx$$

Raționalizînd se obține :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,\varphi(x)\,dx$$

Deoarece $\varphi(x) = 0$ pentru $|x| > R$ (φ are suport compact), adunînd și scăzînd un termen care conține pe $\varphi(0)$ se obține :

$$\frac{1}{x+i0} = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{+R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{+R} \frac{(x-i\varepsilon)\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$

$$= -2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{arctg} \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = -i\pi\varphi(0) + V_p \int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Așadar, am obținut rezultatul :

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\,\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\,\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

Acestea sînt formulele lui Sohotski utilizate mai ales în fizica cuantică. Aici avem nevoie de această formulă pentru calculul lui $\mathcal{F}h$. În acest scop calculăm transformata :

$$\mathcal{F}(h(t)e^{-at}) = \int_0^\infty e^{-(a+i\omega)t}\,dt = \frac{1}{a+i\omega}$$

Pentru $a \to +0$ aplicînd formula lui Sohotski se obţine :

$$\mathcal{F}h = -\pi\delta(\omega) - i\,\mathcal{P}\frac{1}{\omega}$$

Deoarece $\mathcal{F}\delta = 1$, ar trebui ca prin înmulţirea cu $i\omega$ să obţinem $\mathcal{F}(\delta h) = 1$

Într-adevăr :

$$i\omega\,\mathcal{F}h = -i\pi\omega\,\delta(\omega) + 1 = 1$$

deoarece $\omega\delta(\omega) = 0$. Rezultatul este important prin următoarele observaţii:

a) transformata Fourier a distribuţiei Heaviside egală cu $\frac{1}{i\omega}$ pentru $\omega \neq 0$, iar în origine apare distribuţia lui Dirac.

b) Prin derivarea imaginei $\mathcal{F}h$ se obţine $\mathcal{F}\delta = 1$, deoarece pentru orice transformată Fourier derivarea originalului se obţine prin înmulţirea cu $i\omega$ a imaginii.

c) obţinerea primitivei prin împărţirea imaginii cu $i\omega$ nu este întotdeauna posibilă, deoarece $\mathcal{F}f$ este întotdeauna în $\mathcal{S}'$, dar nu ştim în general dacă primitiva îndeplineşte această condiţie. În general, înmulţirea unei funcţii din $\mathcal{S}$ cu o funcţie din C^∞ poate da un produs care nu mai este în $\mathcal{S}$. De exemplu $e^{-t^2}\cdot e^{t^2} = 1 \notin \mathcal{S}$ Multiplicatorii pe $\mathcal{S}'$ sînt funcţiile din C^∞ care (împreună cu derivatele lor) au creşterea la infinit mărginită polinomial.

Să considerăm o ecuaţie diferenţială liniară, cu coeficienţi constanţi $\left(\sum_1^n a_i\delta^{(i)}\right) * x = u$

Aplicarea transformatei Fourier conduce la

$$\left(\sum a_i (i\omega)^i\right) \mathcal{F}x = \mathcal{F}u \qquad \text{de unde}$$

$$\mathcal{F}x = \frac{1}{\sum a_i (i\omega)^i}\, \mathcal{F}u$$

Soluţia x(t) se determină prin calculul inversei $(\mathcal{F}^{-1}x)(t)$

IV-2. Transformata Laplace.

Pentru funcţii care posedă transformata Laplace avem

$$(\mathcal{L}f)(t) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

unde $s = \alpha + i\omega$; $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ este o variabilă complexă. Transformata $\mathcal{L}f$ nu este definită în întreg planul complex ci numai într-un semiplan delimitat de $\alpha = \beta < \infty$ unde β este abscisa de convergenţă absolută (care poate fi şi $\beta = \infty$). Legătura cu transformata Fourier este următoarea:

$$(\mathcal{L}f)(t) = \int_0^\infty [f(t)e^{-\alpha t}]\, e^{-i\omega t}\, dt$$

şi dacă $f(t)e^{-\alpha t}$ este o distribuţie temperată, atunci $\mathcal{L}f$ există.

Există însă o altă cale pentru definirea transformatei Laplace a distribuţiilor, care este mai simplă şi nu pierde din generalitate. Astfel, considerăm în $\mathcal{D}'_+$ distribuţii de ordin finit, adică provenind prin derivarea în sens distribuţii, de un ordin oarecare n, ale unor funcţii care posedă transformata Laplace. Aşadar

$$f = \delta^{n} * g$$

unde g este funcţie iar $\mathcal{L}g$ există. Atunci, prin definiţie:

$$\mathcal{L}f = s^n \mathcal{L}g$$

De exemplu, avem $\mathcal{L}\delta = \mathcal{L}Dh = s\mathcal{L}h = s\cdot\frac{1}{s} = 1$

Pentru polinoame diferenţiale avem:

$$\mathcal{L}\left(\sum_i a_i \delta^{i}\right) = \sum_i a_i s^{i}$$

Considerînd aceste polinoame în nedeterminata δ sau s ele sînt echivalente.

Pentru aplicaţii sînt importante următoarele formule:

$$\mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)\cdot(\mathcal{L}g) \qquad \text{(teorema lui Borel)}$$

Deoarece $f, g \in \mathcal{D}'_+$, produsul de convoluţie există întotdeauna

$\mathcal{L}\delta = 1$; $\mathcal{L}^{-1}(1) = \delta$

$\mathcal{L}h = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}\delta(t-\tau) = e^{-s\tau}$

$\mathcal{L}\delta^{-k} = s^{-k}$; $k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}(he^{\pm\lambda t}) = \frac{1}{s \mp \lambda}$; $\lambda \in \mathbb{C}$

$\mathcal{L}\left[\frac{h}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right] = \frac{1}{s(s+\lambda)}$

$\mathcal{L}[h \sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$; $\mathcal{L}[h \operatorname{sh} \omega t] = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

$\mathcal{L}[h \cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$; $\mathcal{L}[h \operatorname{ch} \omega t] = \frac{s}{s^2-\omega^2}$

etc.

Ca exerciţiu, să calculăm derivata $D[h\cos\omega t]$ avem:

$$\mathcal{L}D(h\cos\omega t) = s\frac{s}{s^2+\omega^2} = 1 - \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2} \qquad \text{de unde} \quad D(h\cos\omega t) = \delta(t) - \omega h \sin\omega t$$

deoarece $h\cos\omega t$ are un salt în origine egal cu 1, în rest derivata fiind cea uzuală.

Pentru fracţii raţionale avem

① $$\mathcal{L}^{-1}\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_1^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t} \quad ; \quad Q'(s) = \frac{d}{ds}Q(s)$$

dacă $Q(s)=0$ are numai rădăcinile simple S_k, P(s) şi Q(s) sînt prime între ele, iar grad P< grad Q. Dacă grad P ⩾ grad Q, se împarte şi rezultă un polinom în S, care este distribuţie, plus funcţia de forma de mai sus.

② Dacă polinomul dela numitor are o rădăcină nulă avem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{P(s)}{sR(s)} = \frac{P(o)}{R(o)} + \sum_1^n \frac{P(s_k)}{s_k R'(s_k)} e^{s_k t}$$

unde S_k sînt rădăcinile simple ale ecuaţiei $R(s)=o$, iar $R'(s)=\frac{d}{ds}R(s)$

Dacă Q(s) are rădăcini multiple atunci utilizăm formula

③ $$\mathcal{L}^{-1}\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_K \frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-s_k)^{n_k}e^{st}\right]$$

unde s_k este o rădăcină a lui $Q(s)=o$, cu ordinul de multiplicitate n_k; suma se extinde la toate rădăcinile lui Q(s). Cele două formule precedente rezultă din aceasta din urmă.

Exemplu: să se rezolve ecuaţia diferenţială:

$$\ddot{x} + x = 2\,h\,\cos t \quad ; \quad t > o \quad ; \quad x(o) = x_o \quad ; \quad \dot{x}(o) = \dot{x}_o$$

Prelungim funcţia x(t) pe toată axa şi punem $x(t<o)=o$. În acest caz x(t) şi $\dot{x}(t)$ au salt în origine şi avem:

$$Dx = \dot{x} + x_o\delta$$
$$D^2x = \ddot{x} + x_o\delta' + \dot{x}_o\delta$$

Ecuaţia dată devine

$$D^2x + x = 2.h\,\cos t + x_o\delta' + \dot{x}_o\delta$$

Aplicînd transformata Laplace se obţine:

$$(s^2+1)\mathcal{L}x = \frac{2s}{s^2+1} + x_o s + \dot{x}_o \qquad \text{sau}$$

$$\mathcal{L}x = \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{x_o s + \dot{x}_o}{s+1}$$

De exemplu, pentru $x_o = o$ şi $\dot{x}_o = -1$ se obţine

$$x(t) = h(t-1)\sin t$$

Pentru $\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+1)^2}$ se poate utiliza teorema lui Borel (se recomandă ca exerciţiu).

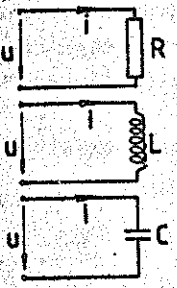
.//.

CAPITOLUL V.

Circuite şi amplificatoare.

V-1. Circuite liniare cu parametri localizaţi.

Reamintim regulile de calcul asociate tensiunilor şi curenţilor de referinţă, pentru R, L, C, M constante:

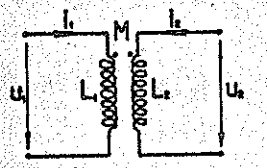


$$u = Ri \qquad i = \frac{1}{R}u = Gu$$

$$u = L\frac{di}{dt} \qquad i = \frac{1}{L}\int_0^t idt$$

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t idt \qquad i = C\frac{du}{dt}$$

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t idt \qquad i = C\frac{du}{dt}$$



$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

Punctul din ultima schemă indică sensul de înfăşurare al bobinelor.

In ecuaţiile de mai sus nu apar explicit condiţiile iniţiale raportăm aceste ecuaţii în $\mathcal{D}'_+$, adică extindem u(t) şi i(t) pe toată axa reală; punînd $u(t<0)=0$ şi $i(t<0)=0$. Calculăm apoi derivatele în sens distribuţii, luînd în considerare saltul în origine. Aşadar avem

$$Du = \frac{du}{dt} + u_0\delta$$

$$Di = \frac{di}{dt} + i_0\delta$$

Sensul fizic este următorul: pentru $t<0$ avem $u(t)=0$, la $t=0$ apare o "sursă instantanee" care realizează saltul dela 0 la u_0. Pentru $t>0$ rezultă $u(t>0)$ şi pentru i(t) utilizăm acelaşi procedeu.

Astfel, pentru bobină avem:

$$u = L\frac{di}{dt} = L(Di - i_0\delta) = L(\delta' * i - i_0\delta)$$

Dacă dorim să aflăm curentul în funcţie de tensiune, înmulţim convolutiv cu h şi rezultă

$$i = \frac{1}{L}h * u + i_0 h$$

.//.

Pentru condensator rezultă:

$$i = C(Du - u_0\delta) \quad \text{respectiv} \quad u = \frac{1}{C} h * i + u_0 h$$

Se observă că relaţiile pentru bobină şi condensator sînt duale. La condensator interpretarea fizică este următoarea: pentru $t < 0$ avem $u(t) = 0$; la momentul $t=0$ apare o sursă instantanee care încarcă condensatorul la tensiunea u_0, după care rezultă $u(t>0)$. Acceptarea idealizării de "sursă instantanee" este analoagă cu acceptarea noţiunii de "forţă punctuală" sau " masă punctuală" sau "contact punctual" sau "conductor filiform" etc.

Să luăm ca exemplu circuitul R, C din figura următoare

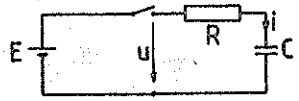


Fig. V-1

La $t = 0$ contactul se închide instantaneu deci $u = Eh$. Suma tensiunilor la borne este atunci:

$$u = Ri + \frac{1}{C} h * i + u_0 h$$

unde u_0 este tensiunea la bornele condensatorului la $t = 0$ (salt în origine).

Cu transformata Laplace avem:

$$(R + \frac{1}{sC}) \mathcal{L}i + \frac{u_0}{s} = \frac{E}{s} \; ; \text{ notăm } RC = \tau \neq 0 \text{ şi avem}$$

$$\mathcal{L}i = \frac{E - u_0}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \quad \text{aşadar} \quad i = h \frac{E - u_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Evident, pentru $u_0 = E$ curentul este zero. Tensiunea la bornele condensatorului este deci:

$$u_c = \frac{1}{C} h * h \frac{E - u_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + u_0 h = \frac{E - u_0}{\tau} \int_R h(t-\theta) h(\theta) e^{\frac{\theta}{\tau}} d\theta +$$

$$+ u_0 h \; \hat{=} \; u_c = h(E - u_0)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + u_0 h$$

Pentru $t = +0$ avem $u_c = u_0$ iar pentru $t \to \infty$ rezultă $u_c = E$

Să vedem acum ce se întîmplă dacă R este neglijabil; avem

$$u_c = Eh \quad ; \quad i = C(E - u_0)\delta$$

Curentul este zero, cu excepţia punctului $t=0$; condensatorul se încarcă bruso cu sarcina electrică $Q - Q_0$ unde $Q = EC$ şi $Q_0 = u_0 C$. Verificăm acum relaţia:

$$u_c = \frac{1}{C} h * C(E - u_0)\delta + u_0 h = Eh - u_0 h + u_0 h = Eh$$

.//.

Pentru R foarte mic, tensiunea şi curentul sînt date de formulele precedente; se observă că i(+o) devine mare. Putem considera un şir de funcţii cu $R_n \to 0$ cînd $n \to \infty$; se poate demonstra că şirul i_n converge slab către $i = C(E+u_0)\delta$. Acesta este un exemplu de şir reprezentativ Dirac.

Să luăm acum ca exemplu schema din fig. V-2.

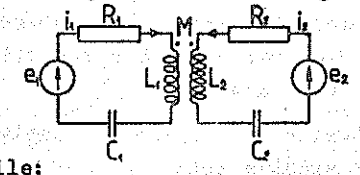


Fig. V-2

Rezultă ecuaţiile:

$$\begin{cases} R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_0^t i_1 dt = e_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int_0^t i_2 dt = e_2 \end{cases}$$

Pentru a determina soluţia în $\mathcal{D}'_+$ aplicăm transformata Laplace şi rezultă:

$$\left(R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1}\right)\mathcal{L}i_1 + sM\mathcal{L}i_2 = \mathcal{L}e_1 + L_1 i_{10} + M i_{20} - \frac{u_{10}}{s}$$

$$sM\mathcal{L}i_1 + \left(R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2}\right)\mathcal{L}i_2 = \mathcal{L}e_2 + L_2 i_{20} + M i_{10} - \frac{u_{20}}{s}$$

unde i_{10} şi i_{20} sînt salturile curentului la t=o, iar u_{10} şi u_{20} sînt salturile tensiunilor dela bornele condensatoarelor la t=o. Să aducem acum aceste ecuaţii la forma I-4 care descrie un sistem diferenţial, liniar, constant. Rescriem ecuaţiile luînd ca variabile sarcinile electrice q_1 şi q_2 şi rezultă:

$$R_1 \dot{q}_1 + L_1 \ddot{q}_1 + M \ddot{q}_2 + \frac{q_1}{C_1} = e_1$$

$$R_2 \dot{q}_2 + L_2 \ddot{q}_2 + M \ddot{q}_1 + \frac{q_2}{C_2} = e_2.$$

Mai departe facem substituţia:

$$q_1 = x_1 \; ; \; \dot{q}_1 = x_2 \; ; \; q_2 = x_3 \; ; \; \dot{q}_2 = x_4$$

şi aducem sistemul de două ecuaţii de ordinul doi, la un sistem de patru ecuaţii de ordinul întîi. Rezultă:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{L_2}{C_1(L_1L_2-M^2)} & -\dfrac{L_2R_1}{L_1L_2-M^2} & \dfrac{M}{C_2(L_1L_2-M^2)} & \dfrac{MR_2}{L_1L_2-M^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{M}{C_1(L_1L_2-M^2)} & \dfrac{MR_1}{L_1L_2-M^2} & -\dfrac{L_1}{C_2(L_1L_2-M^2)} & -\dfrac{L_1R_2}{L_1L_2-M^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{L_2}{L_1L_2-M^2} & -\dfrac{M}{L_1L_2-M^2} \\ 0 & 0 \\ -\dfrac{M}{L_1L_2-M^2} & \dfrac{L_1}{L_1L_2-M^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Acest sistem este de forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

unde $x=|x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$ şi $u = |e_1, e_2\rangle$ sînt starea şi comanda. Prin urmare, sursele de tensiune din circuit au rolul de "comandă" (sau intrare) iar curenţii şi sarcinile electrice sînt mărimile de stare. Dualul acestui sistem sînt schemele în care comanda este dată de sursele de curent din circuit, iar starea devine tensiune, etc.-

Pentru rezolvarea în $\mathcal{Q}'$ a ecuaţiilor de mai sus avem:

$$Dx = Ax + Bu + x_0$$

unde x_0 sînt salturile în origine ale mărimilor de stare (condiţiile iniţiale). Atunci soluţia este

$$x(t) = he^{At} x_0 + he^{At} B * u$$

Primul termen reprezintă dinamica liberă, iar cel de al doilea reprezintă răspunsul la comenzi. Conceptele asupra stabilităţii se aplică direct, astfel încît stabilitatea este complet descrisă de matricea A. Dacă matricea A este asimptotic stabilă, atunci circuitul intră în regim permanent cînd dinamica liberă devine neglijabilă.

Se numeşte "regim tranzitoriu" dinamica sistemului pentru intervalul de timp în care dinamica liberă nu este neglijabilă.

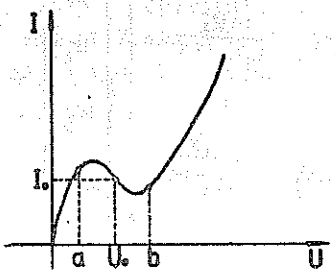
V-2. Metode cvazilineare.

Avem în vedere scheme cu elemente neliniare, care pot fi aduse la forma I-1 ; în acest caz rămîn valabile cele arătate în cap. I, inclusiv obţinerea sistemului liniar în primă aproximaţie. Reamintim că în acest caz curenţii şi tensiunile sînt de forma

$$U = U_0 + \mu \quad (\text{surse, deci comanda } \mu)$$

$$I = I_0 + i \quad (\text{stare, deci } x)$$

unde μ şi i sînt suficient de mici. Parametrii care apar în Jacobianul sistemului sînt exprimaţi prin derivate parţiale, considerate în "punctul de funcţionare" X_0 şi U_0. Aceştia sînt parametrii dinamici ai schemei, care pot fi şi negativi. De exemplu, să considerăm caracteristica statică a unei diode "tunel", reprezentată în fig. V-3.



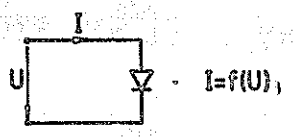


Fig. V-3

.//.

Pentru punctul static de funcţionare avem

$$I_0 = f(U_0)$$

Pentru semnale suficient de mici μ şi i avem

$$I_0 + i = f(U_0 + \mu) \cong f(U_0) + \frac{df}{dU}\Big|_{U_0} \mu$$

Aşadar :

$$i = g\mu \quad ; \quad g = \frac{df}{dU}\Big|_{U_0}$$

unde g este conductanţa dinamică (respectiv $\rho = \frac{1}{g}$ rezistenţa dinamică). Se observă că în punctul M avem $g < 0$, deci apar parametrii negativi.

Considerarea sistemului liniar în primă aproximaţie este foarte frecvent aplicată, mai ales sub denumirea "funcţionarea cu semnale mici".

Dispozitivele electronice ca : tuburi, tramzistoare, amplificatoare operaţionale, etc. sînt elemente neliniare. Considerarea semnalelor suficient de mici şi tratarea luînd ca model sistemul în primă aproximaţie este foarte utilă în aplicaţiile practice. Pentru un "program de funcţionare", care nu mai este static, liniarizarea încă poate fi utilă, de exemplu în cazul cînd conduce la

$$\dot{x} = A(t)\, x + B(t)\mu$$

Ecuaţia este liniară, dar cu parametrii dinamici variabili; aceasta permite o extindere a metodelor liniare pentru semnale "mai mari". De exemplu, în fig. V-2 dacă U variază în limitele (a,b) atunci putem utiliza relaţia:

$$i = g(t)\mu$$

unde g(t) variază în lungul curbei AB. Acest procedeu este de asemenea frecvent întîlnit în aplicaţii practice.

V- 3. Cuadripoli.

Considerăm un sistem liniar în prima aproximaţie care are două borne de intrare şi două borne de ieşire, ca în fig.V-4.

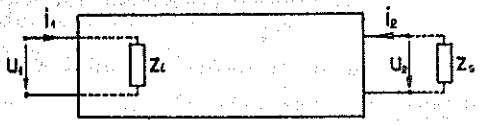


Fig.V-4

La bornele de intrare se măsoară μ_1 şi i_1, iar la bornele de ieşire μ_2 şi i_2.

.//.

Sistemul fiind liniar, admitem că aplicaţia intrare-ieşire este descrisă de o matrice $A \in M(2,2,C)$, astfel încît

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

unde A_{ij} sînt funcţii raţionale în variabila complexă S, rezultată după aplicarea transformatei Laplace. Dacă cuadripolul este utilizat invers avem

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

adică tot o formă liniară. Deoarece tensiunile nu sînt independente de curenţi, rezultă că nici parametrii A_{ij} nu sînt în general independenţi. Intr-adevăr, pentru cuadripolii lineari pasivi (nu conţin surse în interior) rezultă relaţia

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$$

Pentru demonstraţie, a se vedea cursul de Electrotehnică.

Semnificaţia parametrilor A_{ij} este următoarea:

1^0- La mersul în gol avem $i_2 = 0$ şi rezultă

$$u_1 = A_{11}\, u_2 \qquad Z_0 = \frac{A_{11}}{A_{21}} \text{ (impedanţa la mers în gol)}$$
$$i_1 = A_{21}\, u_2$$

Atunci A_{11} este adimensional şi reprezintă "factorul de amplificare în tensiune". Vom spune "amplificare" chiar dacă semnalul este atenuat (amplificare subunitară). Respectiv A_{21} este de dimensiunea unei admitanţe care apare la mersul în gol.

2^0 - La mersul în "scurt circuit" avem $u_2 = 0$ şi rezultă

$$u_1 = A_{12} \cdot i_2 \qquad Z_{sc} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \text{ (impedanţa la scurt circuit)}$$
$$i_1 = A_{22} \cdot i_2$$

Aşadar A_{12} este impedanţa de transfer la scurt circuit, iar A_{22} este amplificarea în curent la scurt circuit.

Se demonstrează că dacă acelaşi cuadripol este conectat în sens invers, atunci avem:

$$u'_1 = A_{22}\, u'_2 + A_{12}\, i'_2$$
$$i'_2 = A_{21}\, u'_1 + A_{11}\, i'_2$$

.//.

Avem şi în acest caz: $A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 1$. Rezultă interpretări similare cu cele de mai sus pentru mersul în gol şi pentru mersul în scurt circuit: De asemenea:

$$Z_o' = \frac{A_{22}}{A_{21}} \qquad Z_{sc}' = \frac{A_{12}}{A_{11}}$$

Se observă că A_{11} şi A_{22} schimbă locurile între ele.

Se numeşte "impedanţa caracteristică"(în cele două sensuri)

$$Z_{1c} = \sqrt{Z_o Z_{sc}} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} \qquad Z_{2c} = \sqrt{Z_o' Z_{sc}'} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}$$

Impedanţele caracteristice au următoarele proprietăţi:

- dacă, pentru sensul direct se conectează la ieşire Z_{2c} , atunci la intrare (stînga) se măsoară Z_{1c}.
- dacă, pentru sensul invers se conectează la ieşire Z_{1c}, atunci la intrare (dreapta) se măsoară Z_{2c}. Într-adevăr, pentru sensul de la stînga la dreapta avem:

$$u_1 = (A_{11}Z_{2c} + A_{12}) \cdot i_2$$

$$i_1 = (A_{21}Z_{1c} + A_{22}) \cdot i_2$$

Aşadar

$$Z_1 = \frac{A_{11}Z_{2c} + A_{12}}{A_{21}Z_{2c} + A_{22}} = \frac{\sqrt{A_{11}A_{12}}}{\sqrt{A_{21}A_{22}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{A_{22}}{A_{21}}} + \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{11}}}}{\sqrt{\frac{A_{12}}{A_{11}}} + \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{21}}}} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} = Z_{1c}$$

Analog se calculează şi pentru sensul invers.

Se numeşte cuadripol simetric cuadripolul pentru care $Z_{1c} = Z_{2c}$, adică cuadripoli cu acelaşi impedanţă caracteristică în ambele sensuri.

Aşadar:

$$\sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} \qquad \text{deci} \quad A_{11} = A_{22}$$

In consecinţă avem şi $Z_o = Z_o'$; $Z_{sc} = Z_{sc}'$

Dacă cuadripolul are o bornă comună la masă pentru intrare şi ieşire, reprezentăm numai borna activă, în fig. V-5 cuadripolul a) este echivalent cu b)

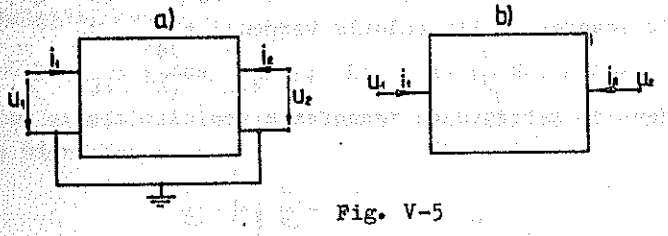


Fig. V-5

.//.

Dacă potenţialul punctului pus la masă îl considerăm zero, atunci $u_1 = v_1$ şi $u_2 = v_2$, unde v_1 şi v_2 sînt potenţialele bornelor respective.

Cînd se conectează mai mulţi cuadripoli în cascadă (în serie) atunci rezultă un cuadripol cu mai multe etaje (blocuri), ca în fig.V.6.-

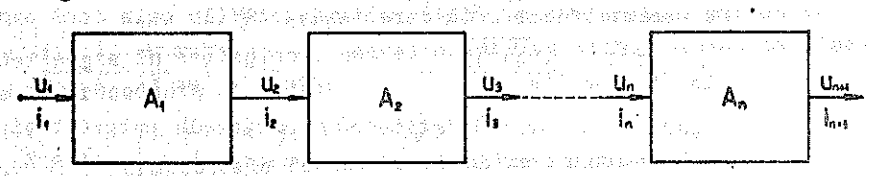


Fig.V-6

Sensul de referinţă fiind arbitrar, este mai convenabilă alegerea sensului curentului ca în figură. Atunci rezultă:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix} ; \ldots ; \begin{bmatrix} u_n \\ i_n \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ i_{n+1} \end{bmatrix}$$

Făcînd înlocuirile evidente rezultă:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \prod_{1}^{n} A_k \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ i_{n+1} \end{bmatrix}$$

Aşadar matricea cuadripolului echivalent este dată de produsul matricelor fiecărui cuadripol. De exemplu, să considerăm trei cuadripoli conectaţi în cascadă, ca în fig.V-7 :

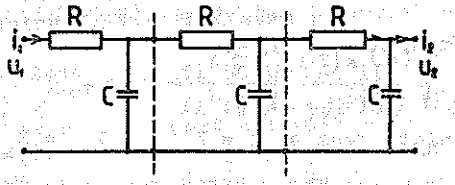


Fig. V-7

Pentru un singur cuadripol avem:

$$Z_0 = R + \frac{1}{sC} \; ; \; Z_{sc} = R \; ; \; Z_0' = \frac{1}{sC} \; ; \; Z_{sc}' = \frac{R}{1 + sCR}$$

Cu acestea, putem calcula termenii A_{ij}:

$$A_{11} = 1 + sCR \; ; \; A_{12} = R \; ; \; A_{21} = sC \; ; \; A_{22} = 1$$

Rezultă matricea de transfer a cuadripolului:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + sCR & R \\ sC & 1 \end{bmatrix}$$

.//.

Se verifică relaţia: $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$. Într-adevăr
$(1 + sCR) - sCR = 1$

Matricea de transfer a celor trei cuadripoli rezultă:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A^3 \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$ unde, cu notaţia $\sigma = CR$

unde

$$A^3 = \begin{bmatrix} (1+2\sigma)\left[(1+2\sigma)^2 + 2\sigma\right] + 2\sigma\,(2+2\sigma) & R\,(1+2\sigma)(3+2\sigma) \\ \sigma\,(1+2\sigma)(1+2\sigma+2\sigma) & R\left[\sigma(1+2\sigma)+2\sigma\right] + 1 + 2\sigma \end{bmatrix}$$

Pentru semnale sinusoidale, înlocuim $\sigma = j\omega$ şi se determină matricea de transfer corespunzătoare.

V. 4. Filtre

Pentru semnale sinusoidale cuadripolul este caracterizat prin factori de transfer la diferite frecvenţe; deoarece un semnal sinusoidal este complet caracterizat prin amplitudine, frecvenţă şi fază, se introduc caracteristici de amplitudine şi fază, în funcţie de frecvenţa semnalului. Riguros, aceste caracteristici se ridică prin puncte, la diferite frecvenţe constante, deoarece dacă frecvenţa variază în timp, semnalul nu mai este sinusoidal. Totuşi, dacă frecvenţa variază suficient de lent în timp, semnalul care rezultă este "aproape sinusoidal" astfel încît caracteristicile care se obţin aproximează bine pe cele în regim strict sinusoidal.

În mod analog, dacă semnalele sînt periodice, adică dacă

$$u(t) = u(t+T)$$

unde constanta T este perioada, în multe aplicaţii este utilă considerarea unor semnale "aproape periodice".

Filtrele sînt caracterizate prin "banda de trecere" care este delimitată de frecvenţa limită inferioară şi frecvenţa limită superioară; în bandă semnalele au o atenuare mult mai mică decît în afara benzii de trecere.

Dacă cuadripolul este conectat la ieşire pe impedanţa caracteristică avem

$$\frac{u_1}{i_1} = \frac{u_2}{i_2} = Z_c \quad \text{de unde} \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{K}$$

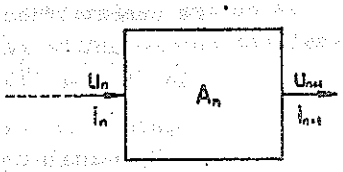
unde K se numeşte factorul de transfer al filtrului respectiv. Pentru semnale sinusoidale avem

$$\frac{u_1}{u_2} = \left|\frac{u_1}{u_2}\right| e^{j\varphi}$$

.//.

la masă îl considerăm zero,
sînt potenţialele bornelor

uadripoli în cascadă (în
multe etaje (blocuri), ca



ltrar, este mai convenabilă ale-
Atunci rezultă:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ i_n \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ i_{n+1} \end{bmatrix}$$

ezultă:

echivalent este dată de pro-
exemplu, să considerăm trei
fig. V-7 :

em:

$Z_c = \frac{1}{sC}$; $Z'_{sc} = \frac{R}{1 + sCR}$

menii A_{ij}:

$A_{21} = sC$; $A_{22} = 1$

a cuadripolului:

$$\begin{bmatrix} R \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notăm raportul modulelor: $\frac{|u_1|}{|u_2|} = e^{a}$ şi avem $\frac{u_1}{u_2} = e^{a} \cdot e^{j\beta} = \frac{1}{K}$

şi rezultă: $-\ln K = a + j\beta$

Dacă notăm $-\ln K = \theta$ avem $\theta = a + j\beta$; semnificaţia este:

1 - θ este constanta de transfer a filtrului, cînd lucrează pe impedanţa caracteristică.

2 - a este atenuarea filtrului

3 - b este defazarea introdusă de filtru

In general, θ, a şi b depind de frecvenţă. In practică atenuarea a se dă în decibeli (dB), conform relaţiei:

$$a(dB) = 20 \log \left| \frac{u_1}{u_2} \right|$$

Dacă atenuarea se dă în putere avem $a = 10 \log \left| \frac{P_1}{P_2} \right|$

Un filtru de bandă ideal este cel la care în bandă avem $|u_1| = |u_2|$, iar în afara benzii $|u_2| = 0$. In fig. V-8 sînt reprezentate filtre de bandă ideale denumite după banda de trecere corespunzătoare ; în ordine : filtru "trece bandă",

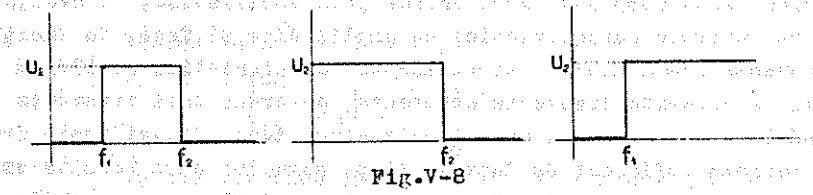


Fig.V-8

filtru "trece jos", filtru "trece sus". Filtrele pot fi utilizate şi pentru rejecţia semnalelor dintr-o anumită bandă, în care caz pentru acea bandă de frecvenţe avem $u_2 = 0$ (la filtrul ideal). In fig.V-9 sînt reprezentate cîteva filtre uzuale şi caracteristicile lor.

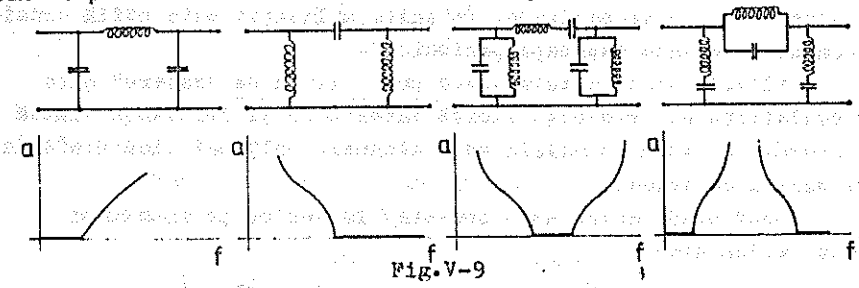


Fig.V-9

Caracteristicile sînt idealizate, în sensul că filtrele sînt considerate fără pierderi.

.//.

V-5. Circuite liniare cu parametrii distribuiţi.

Ca exemplu, considerăm o linie bifilară suficient de lungă, caracterizată prin L, R şi G, C, măsurate pe unitatea de lungime, a liniei, ca în fig. V-1o.

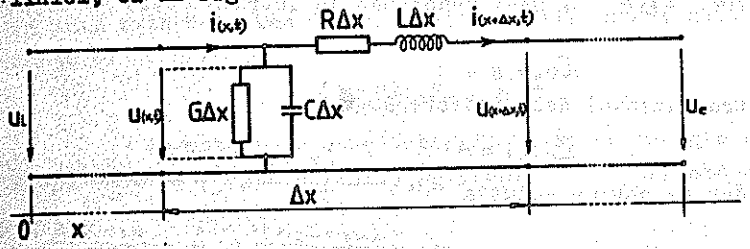


Fig. V-1o.

Rezultă ecuaţiile:

$$u(x,t)-u(x+\Delta x,t)=R\Delta x\cdot i(x+\Delta x,t)+L\Delta x\frac{\partial}{\partial t}i(x+\Delta x,t)$$

$$i(x,t)-i(x+\Delta x,t)=G\Delta x\cdot u(x,t)+C\Delta x\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$$

Împărţind cu Δx şi trecînd la limită pentru $\Delta x\to 0$ se obţine:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}\quad \text{şi}\quad -\frac{\partial i}{\partial x}=Gu+C\frac{\partial u}{\partial t}$$

Aplicînd transformata Laplace în raport cu t se obţine:

$$-\frac{d\mathcal{L}u}{dx}=(R+sL)\mathcal{L}i\quad \text{şi}\quad -\frac{d\mathcal{L}i}{dx}=(G+sC)\mathcal{L}u$$

Derivînd prima în raport cu x, se poate elimina $\mathcal{L}i$ şi se obţine:

$$\frac{d^2\mathcal{L}u}{dx^2}=\gamma^2\mathcal{L}u\quad ;\quad \gamma^2=(R+sL)(G+sC)$$

Aceasta este o ecuaţie de tip hiperbolic cu soluţia:

$$\mathcal{L}u=Ae^{-\gamma x}+Be^{\gamma x}$$

unde constantele A, B şi C se determină din condiţiile la limită. Semnificaţia fizică este însă importantă: soluţia generală conţine un termen care se atenuiază cu x (unda directă) şi un termen care creşte cu x (unda reflectată). Să arătăm acum că dacă linia este conectată la ieşire pe impedanţa caracteristică, atunci unda reflectată dispare, iar la intrare se măsoară impedanţa caracteristică.

Notăm: $Z=R+sL$; $Y=G+sC$, şi avem

$$\begin{cases}-\dfrac{d\mathcal{L}u}{dx}=Z\mathcal{L}i\\[2ex] -\dfrac{d\mathcal{L}i}{dx}=G\mathcal{L}u\end{cases}$$

.//.

Impedanţa caracteristică este $Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ avem, mai departe:

$$\mathcal{L}i = -\frac{1}{Z}\frac{d\mathcal{L}u}{dx} = \frac{1}{Z}\left(\nu A e^{-\nu x} - \nu B e^{\nu x}\right) = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\left(A e^{-\nu x} - B e^{\nu x}\right),$$

sau $Z_c \mathcal{L}i = A e^{-\nu x} - B e^{\nu x}$. Dacă tensiunea la intrare (x=o) este dată avem

$$\mathcal{L}u_1 = A + B$$

Pentru curentul dela intrare avem

$$Z_c \mathcal{L}i = A - B$$

Aşadar se obţine soluţia $\mathcal{L}u = \frac{\mathcal{L}u_1 + Z_c \mathcal{L}i_1}{2} e^{-\nu x} + \frac{\mathcal{L}u_1 - Z_c \mathcal{L}i_1}{2} e^{\nu x}$

$$\mathcal{L}i = \frac{\mathcal{L}u_1 + Z_c \mathcal{L}i_1}{2 Z_c} e^{-\nu x} - \frac{\mathcal{L}u_1 - Z_c \mathcal{L}i_1}{2 Z_c} e^{\nu x}$$

Linia este similară cu un cuadripol simetric, astfel încît dacă se conectează la ieşire Z_c, la intrare se măsoară tot Z_c şi avem

$$\mathcal{L}u_1 = Z_c \mathcal{L}i_2$$

Introducînd mai sus rezultă:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \mathcal{L}u_1 e^{-\nu x} \\ \mathcal{L}i = \mathcal{L}i_1 e^{-\nu x} \end{cases}$$

adică unda reflectată a dispărut. In practică, de exemplu la liniile care alimentează antena unui emiţător, se măsoară unda reflectată şi se acordă linia pînă cînd unda reflectată dispare.-

V.6. Propagare.

Să presupunem o undă electromagnetică plană, într-un mediu imobil, omogen şi izotrop. Se ştie că densitatea de energie a cîmpului electric este egală cu densitatea de energie a cîmpului magnetic, deci avem :

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2 \quad \text{sau} \quad \frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

Intre viteza de propagare a undei electromagnetice în vid $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}$ şi viteza luminii în vid C există relaţia:

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} = 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Intr-un mediu dielectric oarecare vom avea $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$

Densitatea de energie a cîmpului electromagnetic este suma densităţilor de volum electrice şi magnetice, adică:

$$\varepsilon E^2 + \mu H^2 = \sqrt{\varepsilon \mu}\, EH = \frac{EH}{v}$$

$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ avem, mai

$x) = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\left(Ae^{-\vartheta x} - Be^{\vartheta x}\right)$.

ia la intrare (x=o) este dată

rem

$\frac{(u_1 + Z_c di_1}{2} e^{-\vartheta x} + \frac{du_1 - Z_c di_1}{2} e^{\vartheta x}$

$\frac{(u_1 + Z_c di_1}{2Z_c} e^{-\vartheta x} - \frac{du_1 - Z_c di_1}{2Z_c} e^{\vartheta x}$

ripol simetric, astfel încît
rare se măsoară tot Z_c şi

actică, de exemplu la liniile
se măsoară unda reflectată şi
tă dispare.-

gnetică plană, într-un mediu
ensitatea de energie a cîm-
de energie a cîmpului

$\frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$

idei electromagnetice în vid
xistă relaţia:

$o^8\ m/s \approx 3 \cdot 10^8\ m/s$

sare vom avea $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

lui electromagnetic este suma
tice, adică:

4

Pentru un volum elementar dl.ds. energia electromagnetică conţinută va fi :

$$\frac{EH}{v}\, dl.ds$$

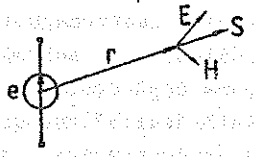
Dar avem: dl =vdt. Cantitatea de energie ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă normală la v se obţine împărţind cu ds şi dt.Rezultă

$$\frac{EH\, v\, dt.ds}{v\, dt\, ds} = EH$$

Aceasta este densitatea fluxului de energie electromagnetică, orientată după direcţia de propagare se notează cu produsul vectorial (vectorul Poynting)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Să considerăm acum dipolul din fig.V-11. Sursa e încarcă



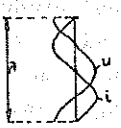


fig.V-11.

succesiv cele două sfere, cu sarcini de nume contrar; presupunem sursa de t,e,m sinusoidală. Atunci amplitudinea curentului şi a tensiunii în "antenă" arată că în fig.V-11; evident, la capetele conductorului curentul de conducţie se anulează,iar tensiunea este maximă. Variaţia de cîmp magnetic şi cîmp electric din vidul care înconjoară dipolul determină un fenomen de radiaţie electromagnetică. Vectorul lui Poynting S reprezintă densitatea fluxului de energie electromagnetică,orientat pe direcţia de propagare a undei electromagnetice. Distanţa parcursă de undă în timpul T al unei perioade se numeşte lungime de undă:

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}(m) = \frac{3 \cdot 10^8}{f(Hz)}(m) = \frac{3 \cdot 10^5}{f(KHz)}(Km) = \frac{3 \cdot 10^2}{f(MHz)}(m) = \frac{3 \cdot 10^{-1}}{f(GHz)}(mm)$$

unde f este frecvenţa; frecvenţele radio se dau în KHz, MHz, GHz. (respectiv 10^3, 10^6, 10^9Hz), iar lungimile de undă corespunzătoare în km, m, mm, etc.

Să arătăm cum se propagă energia electromagnetică prin conductor.

In fig.V-12 este reprezentat un conductor cilindric parcurs de un curent constant

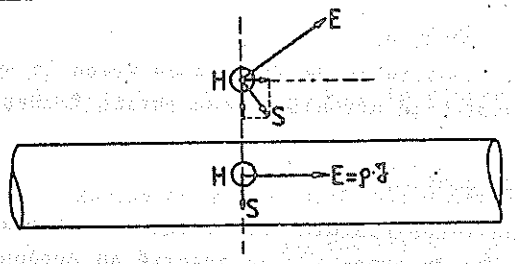


Fig.V-12

Aici $\mathcal{J}$ reprezintă vectorul densităţii de curent, ρ rezistivitatea conductprului, E cîmpul electric, H cîmpul magnetic, S vectorul Poynting. Se observă că în interiorul conductprului,S este orientat spre axa geometrică a conductorului, unde H=0.Rezultă de aici că în interiorul conductorului energia electromagnetică este absorbită integral şi se transformă în căldură. În schimb, în exteriorul conductorului,S se poate descompune după două direcţii: spre conductor şi în lungul conductorului. Iată deci că energia electromagnetică nu se propagă prin interiorul conductorului, ci numai prin cîmpul exterior conductorului. Aşadar conductorul are rolul numai de "ghid de undă" similar cu cel al ghidurilor care dirijează unda radiată (aici nu avem undă radiată deoarece curentul este constant).

Tipurile uzuale de antene întîlnite în aviaţie sînt, de exemplu = antene filare, antene cadru, antene parabolice, antene dielectrice, lentilele pentru microunde, antene pantă, antene cu sisteme de dipoli,etc. In unele aplicaţii de ghidaj (de ex.ILS,MLS) efectul de directivitate al antenelor este esenţial.

V.7. Amplificatoare.

Amplificatoarele considerate aci sînt cuadripoli acti adică puterea semnalului aplicat la intrare poate fi amplificat, astfel încît la ieşire puterea poate fi mai mare decît la intrare (cuadripolul posedă surse de energie). In general, amplificatoarele sînt cuadripoli neliniari; liniarizarea se bazează pe ipoteza că semnalele care apar sînt suficient de mici, altfel apar limitări.

Orice amplificator este caracterizat prin banda de trecere; astfel,un amplificator de audiofrecvenţă are banda cuprinsă între 30 şi 16000 H_z, frecvenţe la care atenuarea faţă de interiorul benzii este de 3 dB (convenţional).Justificarea convenţiei este că atenuarea corespunzătoare de putere, la capetele benzii, este $\frac{1}{2}$.

.//.

Amplificatoarele selective (de exemplu în radio) au o bandă de trecere suficient de îngustă pentru a selecţiona numai semnalele dorite.

Amplificatoarele de bandă largă (de exemplu canalul video $25Hz \div 6MHz$) au o bandă suficientă pentru o viteză mare de transmitere a informaţiei.

In continuare vom reprezenta amplificatorul ca în fig.V-13;

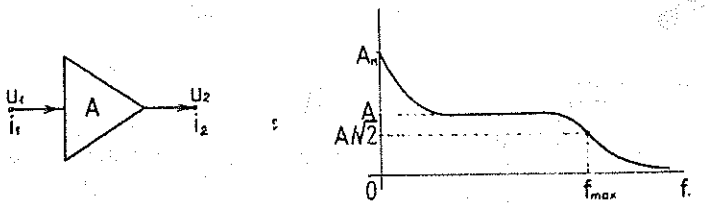


Fig.V-13

amplificarea în bandă este A, iar pentru cel din fig. V-13 amplificarea se referă la raportul tensiunilor $A=\left|\frac{u_2}{u_1}\right|$. In acest exemplu banda de trecere este $0 \div f$ max.

Dacă impedanţa de intrare a amplificatorului este foarte mare atunci putem aproxima prin $i_1 \simeq 0$, ceeace la amplificatoarele de tensiune este admisibil.

Evident, toate combinaţiile tensiune, curent, putere au sens, astfel încît putem vorbi de amplificatoare de putere ($p_1 \longmapsto p_2$), amplificatoare de curent ($i_1 \longmapsto i_2$) amplificatoare de tensiune ($u_1 \longmapsto u_2$), dar şi de combinaţii ca tensiune-curent ($u_1 \longmapsto i_2$) etc.

Dacă amplificatoarele sînt cuplate prin condensatoare, efectul poate fi reducerea amplificării la frecvenţe joase. Scăderea la zero a amplificării la frecvenţe mari se datoreşte inevitabilei capacităţi parazite a montajului. Să luăm ca exemplu schema din fig. V-14. Deoarece condensatoarele au pierderi apare r care reprezintă rezistenţa echivalentă pierderilor lui C; pierderile lui C_0 sînt considerate în R. Calculăm pe u_3 funcţie de u_1 şi se obţine:

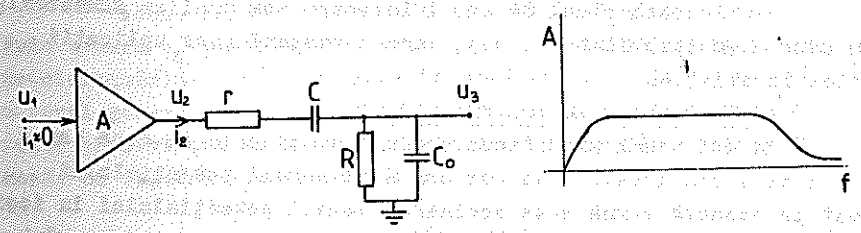
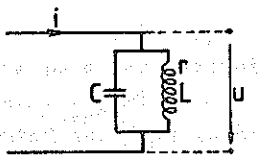
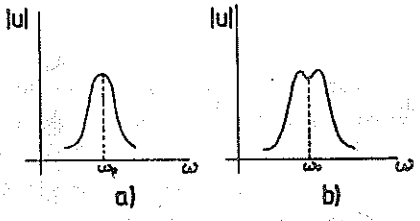


Fig. V-14

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = A\,\frac{j\omega CR}{1-\omega^2 C_0 CR + j\omega[C(r+R)+C_0R]}$$

Se vede uşor că $\left|\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right| \to 0$ atît pentru $\omega \to 0$ cît şi pentru $\omega \to \infty$ .Pentru cazul circuitelor acordate, considerăm schema din fig. V-15.





Dacă i este dat avem:

$$u = \underline{Z}\,i = \frac{\frac{1}{j\omega C}(r+j\omega L)}{r+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot i$$

unde r este rezistenţa echivalentă de pierderi în circuit.Dacă $r \ll L\omega$.unde $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, atunci putem aproxima prin

$$u = \frac{\frac{L}{C}}{r+jL\omega_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\cdot i$$

La rezonanţă, $\omega = \omega_0$, se obţine un maximum pentru $|u|$, iar impedanţa circuitului acordat este $\underline{Z}_R = \frac{L}{Cr}$ (fig.V-15,a) circuitul din fig. V-2 poate fi dimensionat astfel încît caracteristica sa să arate ca în fig.V-2,b; se observă că această caracteristică se apropie, mai mult decît precedenta, de un filtru de bandă ideal, ceeace o face utilă în radiocomunicaţii.

CAPITOLUL VI.

Amplificatoare operaţionale şi aplicaţii.

Din această clasă de amplificatoare vom analiza sumatorul, integratorul, multiplicatorul, etc, care corespund unor aplicaţii practice în aviaţie.

VI-1. Reacţia în amplificatoare.

In mod uzual amplificatoarele operaţionale au două borne de intrare; borna notată + ceeace arată că semnul potenţialului aplicat pe această bornă este acelaşi cu semnul potenţialului la ieşire, şi borna notată cu - ceeace arată că intrarea şi ieşirea sînt de semn contrar.

.//.

Dacă semnalul dela intrarea amplificatorului depinde de ieşirea aceluiaşi amplificator, atunci se spune că amplificatorul are "reacţie". In această situaţie, dacă amplificarea cu reacţie este mai mică decît amplificarea fără reacţie, atunci se spune că reacţia este negativă, iar în caz contrar reacţia este pozitivă.

Pentru reacţia în amplificatoare luăm ca exemplu schema din fig.VI-1.

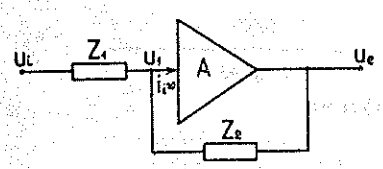


Fig. VI-1

Avem deci: $u_e = Au_1$

$$\frac{u_i - u_1}{Z_1} + \frac{u_e - u_1}{Z_2} = 0 \qquad \text{de unde :}$$

$$u_e\left(\frac{1-\frac{1}{A}}{Z_2} - \frac{1}{AZ_1}\right) + \frac{u_i}{Z_1} = 0 \qquad \text{sau}$$

$$u_e = -\frac{Z_2}{Z_1(1-\frac{1}{A}) - \frac{Z_2}{A}}\, u_i \qquad \text{VI- 1}$$

In banda de trecere a amplificatorului şi dacă A este mare, se poate scrie aproximativ :

$$u_e \simeq -\frac{Z_2}{Z_1}\, u_i \qquad \text{VI- 2}$$

Să studiem însă mai atent formula VI-1- Să presupunem, de exemplu, că prin alegerea lui Z_1 şi Z_2 se realizează :

$$Z_1(1 - \frac{1}{A}) - \frac{Z_2}{A} = 0 \qquad \text{sau} \qquad (A \neq 0)$$

$$Z_1(A - 1) - Z_2 = 0 \qquad \text{V-3.}$$

Acum, dacă punem $u_i = o$ rezultă $u_e = \frac{0}{0}$ deci nedeterminare. Prin urmare u_e poate lua o valoare care rezultă în urma ridicării nedeterminării. Sensul fizic este următorul: cu intrarea zero, amplificatorul generează un semnal la ieşire, Acesta este cazul oscilatoarelor electronice cu reacţie pozitivă. De exemplu, punînd borna u_i la masă, cu impedanţele alese astfel:

$$Z_1 = \frac{R_1}{1+j\omega C_1 R_1}; \qquad Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \qquad \text{rezultă:}$$

anulînd separat partea

$$\frac{R_1}{1+j\omega C_1 R_1}(A-1) - R_2 - \frac{1}{j\omega C_2} = 0$$

.Á/.

reală şi partea imaginară rezultă:

$$(A-1)R_1 - R_2 - \frac{C_1}{C_2}R_1 = 0 \quad \text{sau} \quad A = 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$$

$$\omega C_1 R_1 R_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0 \qquad \text{sau} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

$$\tau_1 = C_1 R_1 \; ; \; \tau_2 = C_2 R_2 \qquad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

S-a obţinut un tip de generator de semnale foarte frecvent întîlnit în practică, amplificarea şi frecvenţa de oscilaţie fiind cele de mai sus.

Un alt exemplu este

$$Z_1 = \frac{L/C}{r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \; ; \quad Z_2 = R$$

Introducînd în V-3 se obţine:

$$A = 1 + rR\frac{C}{L} \; ; \qquad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Acesta este de asemenea un oscilator cu reacţie pozitivă, utilizat mai ales în radiotehnică. Aceste aplicaţii arată care este una din utilităţile reacţiei pozitive. Să vedem acum utilitatea reacţiei negative. Pentru aceasta luăm în considerare schema din fig. VI-2. Pe legătura de reacţie este conectat un cuadripol cu factorul de transfer α, iar ξ este un zgomot aplicat la intrarea lui A_2. Atunci avem:

$$u_3 = A_2\xi + A_2A_1(u_1 + \alpha u_3) \text{ de unde:}$$

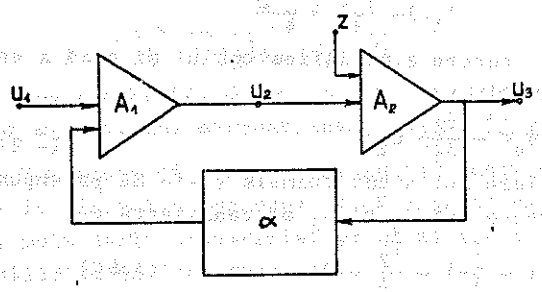


Fig.VI-2

$$u_3 = \frac{A_1A_2}{1-\alpha A_1A_2}u_1 + \frac{A_2}{1-\alpha A_1A_2}\xi$$

Se vede că A_1 poate fi dimensionat astfel încît efectul zgomotului la ieşire să fie diminuat, raportul semnal- zgomot fiind A_1. Evident, aceasta numai cînd reacţia este negativă, altfel schema poate intra în oscilaţie.

In general reacţia negativă este utilă pentru micşorarea efectelor neliniarităţilor; micşorarea influenţei îmbătrînirii pieselor din schemă, etc. Se observă că pentru α mare în modul zgomotul dispare iar amplificarea devine la limită $\frac{1}{\alpha}$; aşadar, cu

.//.

cît reacţia negativă este mai "mare",cu atît schema este influenţată numai de elementele componente ale lui α. Dacă cuadripolul α este ales în mod special, aceasta poate avea o influenţă hotărîtoare asupra amplificatorului rezultat.

VI-2. Sumatoare şi integratoare.

Sumatorul este reprezentat în fig.VI-3; în banda de lucru şi considerînd impedanţa de intrare foarte mare, prima aproximaţie conduce la relaţia:

$$\sum_1^n \frac{V_i - u_1}{R_i} + \frac{u_e}{R} = 0 \qquad ; \qquad u_e = A u_1$$

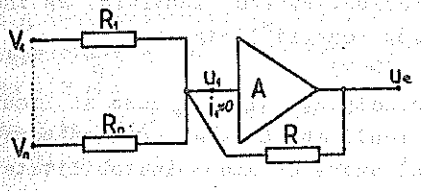


Fig.VI-3

Rezultă deci

$$u_e = - \frac{R}{1 - \sum_1^n \frac{R}{A R_i}} \sum \frac{V_i}{R_i}$$

Deoarece A este suficient de mare se poate aproxima cu

$$u_e = - R \sum_1^n \frac{V_i}{R_i}$$

Dacă alegem $R_i = R$, atunci amplificarea pe toate canalele este unitatea, aşadar:

$$u_e = - \sum_1^n V_i$$

adică s-a realizat un sumator. Pentru un singur canal acest amplificator este numai un schimbător de semn. Sumatorul poate fi atunci realizat cu schimbarea sau fără schimbarea semnului. În continuare îl vom reprezenta ca în fig.VI-4, specificînd pe fiecare canal de intrare factorul de amplificare. Cînd nu se specifică, înseamnă că amplificarea este + 1.

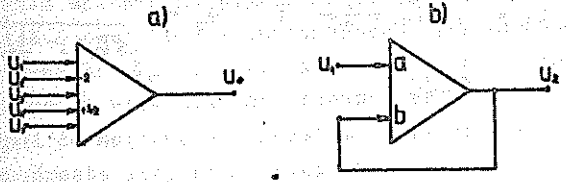


Fig.VI-4

.../.

Sumatoarele pot fi conectate cu reacţie (negativă,fără a pierde stabilitatea), ca în fig.VI-4, b, în care caz avem:

$$u_2 = au_1 + bu_2 \quad \text{de unde} \quad u_2 = \frac{a}{1-b} u_1 \; ; \; b \neq 1$$

astfel încît pot fi realizate amplificări cu fracţii raţionale.

Nu trebuie uitat că sumatorul este descris mai sus în primă aproximaţie; o analiză mai atentă arată că de fapt funcţia de transfer a sumatorului este mai bine aproximată ţinînd seamă de termeni de ordin superior. Experimental aceasta rezultă imediat din următorul exemplu : dacă se conectează mai multe sumatoare într-o schemă în care intervin şi reacţii, de obicei rezultă instabilitate, deoarece apare efectul termenilor de ordin superior. Pentru ilustrare, să încercăm să rezolvăm un sistem algebric de ecuaţii liniare:

$$Ax = b \quad (\text{în } R)$$

cu ajutorul sumatoarelor. In principiu, aci apar sume şi înmulţiri cu numere reale, deci schema este realizabilă numai cu sumatoare. In general, rezultatul experimental arată că apare instabilitate, iar explicaţia este că apare efectul termenilor de ordin superior.

Pentru multiplicarea cu o constantă $0 \leq K \leq 1$ se poate utiliza cu succes potenţiometrul, reprezentat în fig.5. Pentru mersul în gol avem:

$$u_2 = \frac{R_x}{R} u_1 \; , \; 0 \leq R_x \leq R \; ; \; K = \frac{R_x}{R}$$

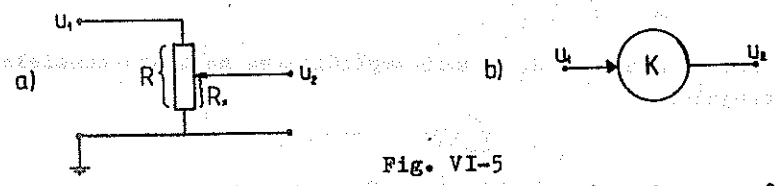


Fig. VI-5

Potenţiometrul va fi reprezentat în scheme ca în fig.VI-5,b.

Dacă potenţiometrul este conectat la ieşire pe o rezistenţă de sarcină R_s, atunci trebue făcută corecţia necesară pentru K. In practică u_1 şi u_2 se măsoară cu un voltmetru şi se deduce K.

Pentru descrierea integratorului considerăm din nou schema din fig.VI-1, unde punem

$$Z_1 = R, \; Z_2 = \frac{1}{sC} \; ; \quad u_e = -\frac{1}{s\tau\left(1-\frac{1}{A}\right)-\frac{1}{A}} u_i \; ;$$

$$\tau = RC$$

.//.

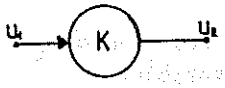
reacţie (negativă,fără a
în care caz avem:

$$2 = \frac{a}{1-b}\,u_1 \;;\quad b \neq 1$$

cu fracţii raţionale.
ste descris mai sus în primă
ă de fapt funcţia de transfer
nînd seamă de termeni de
ltă imediat din următorul
matoare într-o schemă în care
stabilitate, deoarece apare
tru ilustrare, să încercăm
. liniare:

ici apar sume şi înmulţiri cu
lă numai cu sumatoare. In
i apare instabilitate, iar
lor de ordin superior.
entă $0 \leq K \leq 1$ se poate utiliza
fig.5. Pentru mersul în gol

$$\leq R_x \leq R \;;\quad K = \frac{R_x}{R}$$



at în scheme ca în fig.VI-5,b-
at la ieşire pe o rezistenţă
oţia necesară pentru K. In
etru şi se deduce K.
ui considerăm din nou schema

$$_e = -\frac{1}{sC\left(1-\frac{1}{A}\right)-\frac{1}{A}}\,u_i \;;$$

Pentru A mare, în banda de luoru şi în primă aproximaţie avem

$$u_e \simeq -\frac{1}{sC}\,u_i$$

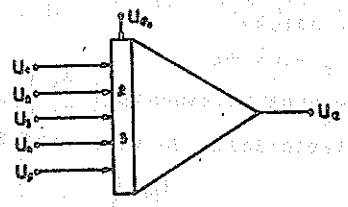


Fig.VI-6

Dacă la intrare se conectează o reţea de însumare (ca la sumator) atunci integratorul efectuează şi suma şi integrarea. Condiţia iniţială a integratorului $u_e(t_0) = u_{e_0}$ se specifică la borna de sus. Pentru reprezentarea din fig. VI-6, integratorul efectuiază operaţia următoare (în $\mathcal{D}'_+$).

$$Du_e = u_e + u_{e_0}\delta = B u + u_{e_0}\delta = \langle 1,2,1,3,1 \,|\, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle + u_{e_0}\delta$$

deci $B = [\,1\ 2\ 1\ 3\ 1\,]$; $u = |\,u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\rangle$

sau scrisă scalar:

$$Du_e = u_1 + 2u_2 + u_3 + 3u_4 + u_5 + u_{e_0}\delta$$

Să vedem cum se realizează tehnic condiţia iniţială, în schema din fig.VI-7.

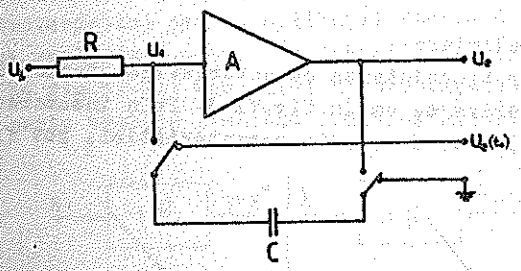


Fig.VI-7.

deoarece A este mare, putem considera $u_1 \simeq 0$. Pentru $t < t_0$ avem $u_e(t < t_0) = 0$. La $t = t_0$ un releu de *pornire* conectează condensatorul încărcat la tensiunea $u_e(t_0)$ la schema de integrare. Prin urmare, $u_e(t)$ are un salt la $t = t_0$ egal cu u_{e_0}, astfel încît integrarea porneşte cu această valoare iniţială. Acest caz este un exemplu de realizare practică a unei "surse instantanee", aşa cum s-a considerat pentru descrierea în $\mathcal{D}'_+$. Singura idealizare este considerarea acţiunii "instantanee" a releului, dar aceasta este admisă în practică deoarece timpul de acţionare a releului este mic la scara timpului în care se urmăreşte răspunsul integratorului.

.//.

Dacă în schema integratorului se schimbă între ele R şi C, se obţine un derivator, adică:

$$u_e = RC\,\dot{u}_i$$

Dacă punem $s = j\omega$ şi reprezentăm $\left|\frac{u_e}{u_i}\right|$ pentru derivator şi integrator se obţin caracteristicile de frecvenţă din fig. VI-8.

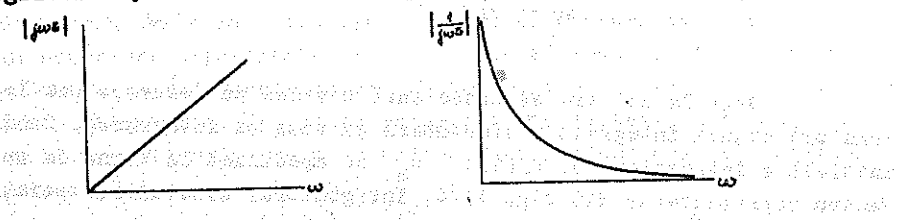


Fig.VI-8

După cum se observă, un derivator ideal amplifică semnalele de frecvenţe mari, pe cînd integratorul le atenuiază. Echivalent, zgomotul va fi în general amplificat de derivator, mai ales dacă conţine în spectru frecvenţe mari. In schimb integratorul atenuează frecvenţele mari, deci " netezeşte" semnalele, astfel încît efectul zgomotului este atenuat. Din acest motiv, în schema practică derivatorul este utilizat numai în cazuri strict necesare, iar integratorul are o utilizare universală.

VI-3. Aplicaţii neliniare.

Diodele polarizate translatează caracteristica statică în funcţie de tensiunea de polarizare, ca în fig.VI-9. Prin însumarea curenţilor (sau tensiunilor) date de aceste caracteristici, pot fi

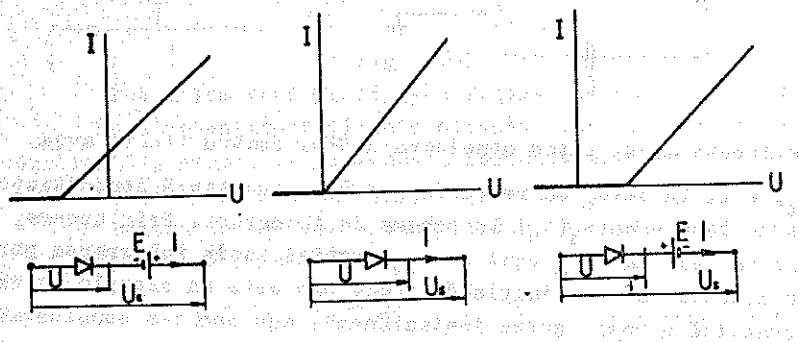


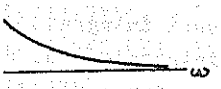
Fig.VI-9

obţinute diverse funcţii, cu *derivata* de semn constant. Dacă se utilizează şi elemente active, atunci pot fi realizate şi funcţii la

.//.

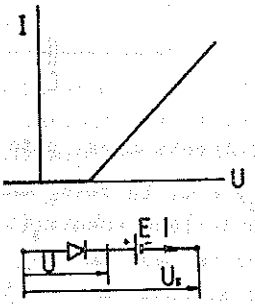
schimbă între ele R şi C.

pentru derivator şi
nţă din fig. VI-8.



r ideal amplifică semnalele
atenuiază. Echivalent, zgo-
ator, mai ales dacă conţine
ratorul atenuează frecven-
tfel încît efectul zgomotu-
ma practică derivatorul est
iar integratorul are o uti-

caracteristica statică în
fig.VI-9. Prin însumarea
te caracteristici, pot fi



nn constant. Dacă se uti-
realizate şi funcţii la

care derivata schimbă de semn. Să luăm ca exemplu parabola $y=x^2$, pentru $x \geq 0$. Schema de principiu este arătată în fig.VI-10.

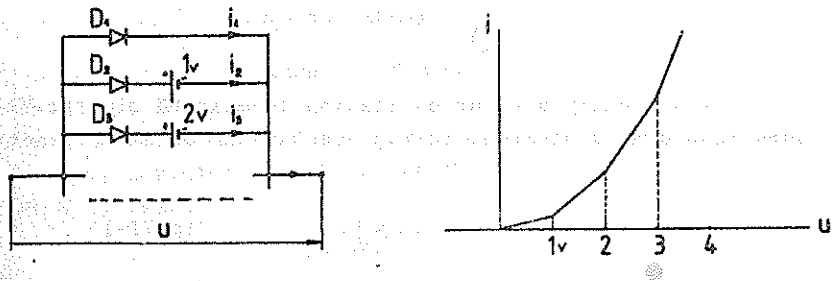


Fig.VI-10

Din schemă se observă că:

$i = i_1$ pentru $0 < u < 1$

$i = i_1 + i_2$ " $1 < u < 2$

$i = i_1 + i_2 + i_3$ " $2 < u < 3$

etc.

Aşadar, funcţia $y = x^2$ se aproximează prin segmente; pentru scopuri practice aproximaţia este destul de bună. Pe schema dual rezultă tot astfel caracteristici la care se însumează tensiuni. Cu sumatoare şi schimbătoare de semn pot fi deci realizate numeroase caracteristici pentru aplicaţii foarte diverse. In general, blocurile care realizează astfel de funcţii vor fi reprezentate în continuare ca în fig.VI-11, unde sînt cîteva exemple. Evident, în fiecare caz în parte trebuie precizat domeniul de definiţie al semnalelor de in-

Fig.VI-11

trare, din care rezultă limitările pentru x ; de exemplu, log x are sens pentru $x > 0$, dar trebue specificat şi x_{max}

Tot cu titlul de exemplu, să realizăm acum caracteristica $y = |x|$

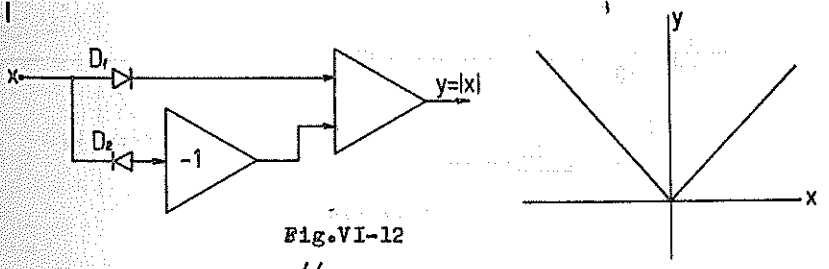


Fig.VI-12

.//.

Pentru $x>0$ conduce dioda D_1 şi avem $y>0$. Pentru $x<0$ conduce dioda D_2, după care se schimbă sensul, deci rezultă $y>0$. Observăm că aceasta este chiar definiţia funcţiei "modul":

$$y = \begin{cases} x \text{ pentru } & x>0 \\ -x \quad " & x<0 \end{cases}$$

Dioda "zener" are caracteristica idealizată din fig.VI-13, în care este arătat şi modul de reprezentare în schemele practice.

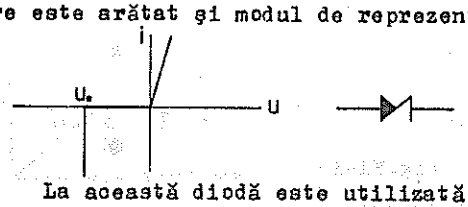


Fig.VI-13

La această diodă este utilizată caracteristica $u_D=u$, pentru $i<0$; se observă că practic tensiunea la bornele diodei rămîne constantă, pentru variaţii relativ mari ale curentului. Aceasta face să fie utilă în scheme ca = stabilizarea tensiunii, limitatoare de amplitudine (protecţia la supratensiune) etc.

Diodele semiconductoare mai au numeroase aplicaţii practice, din care menţionăm:

1. Sensibilitatea joncţiunii la variaţia temperaturii, cu realizare practică "termistorul" prezent în punote calde în care trebue controlată temperatura la avion.

2. Variaţia capacităţii joncţiunii în funcţie de tensiunea aplicată (diode varicap)

3. Efectul luminescent al unor semiconductoare, foarte util ca afişare numerică.

La bordul avionului sînt relativ rar utilizate, deoarece pentru ecrane puterea consumată pe unitatea de suprafaţă este prea mare (de altfel este singurul neajuns pentru moment).

Să revenim acum la o schemă cu diode zener cu funcţia de limitator de amplitudine. In fig.VI-14 este reprezentat un astfel de limitator de amplitudine.

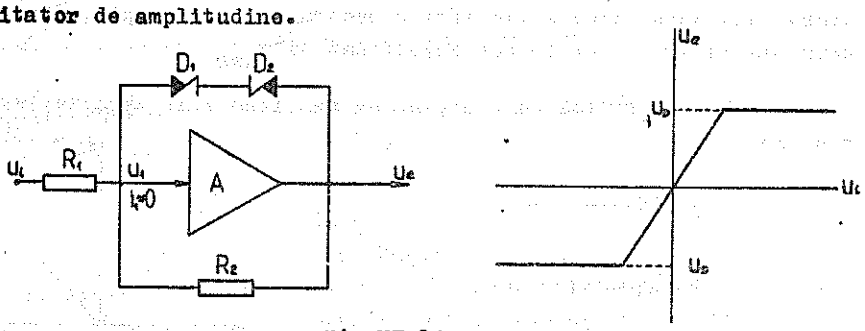


Fig.VI-14

.//.

;i avem y>o. Pentru x< o conduc
deci rezultă y> o. Observăm că
'modul":

x > o

x < o

ia idealizată din fig.VI-13,
intare în schemele practice.

Fig.VI-13

ă caracteristica $u_0=u$, pentru
la bornele diodei rămîne constan
irentului. Aceasta face să fie
lunii, limitatoare de amplitu-

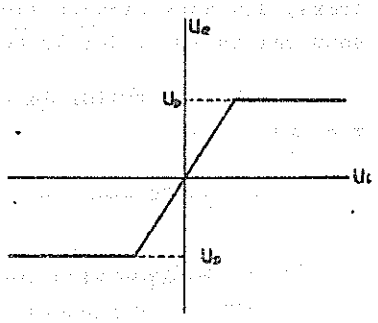
numeroase aplicaţii practice,

variaţia temperaturii, cu
it în punote calde în care

lunii în funcţie de tensiunea

semiconductoare, foarte util

lv rar utilizate, deoarece pentr
suprafaţă este prea mare (de
ment),
cu diode zener cu funcţia de
este reprezentat un astfel de



Ca anterior, deoarece A este mare, aproximăm $u_1 \approx o$; atunci tensiunea la bornele dipolului cu diode este practic u_e. Idealizînd, acest dipol nu conduce pentru $-u_D < u_e < u_D$, deci în acest domeniu amplificarea este $\frac{R_2}{R_1}$ (dau 1 dacă $R_2 = R_1$). Dacă $|u_e| > u_D$, atunci una din diode intră pe caracteristica $u_D = u_o$, iar cealaltă conduce, deci avem $u_e \approx u_o = u_D$.

Dacă scoatem din schemă rezistenţa R_2, atunci amplificarea este A; panta caracteristicei limitatorului se apropie de 90°, deci idealizînd se realizează funcţia

$$y = \begin{cases} u_D & \text{pentru } x > o \\ o & " \quad x = o \\ -u_D & " \quad x < o \end{cases} \quad \text{sau} \quad y = u_D \operatorname{sgn} x$$

O schemă cu aceeaşi caracteristică se poate realiza şi cu diode polarizate.

Un bloc de multiplicare $z = xy$ este arătat în fig.VI-15; această schemă reprezintă simularea identităţii:

$$xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$$

Schema este realizată cu blocuri care nu schimbă semnul, iar pentru schimbarea semnului au fost utilizate sumatoare cu o singură intrare. Blocul integrat va fi reprezentat în continuare prin

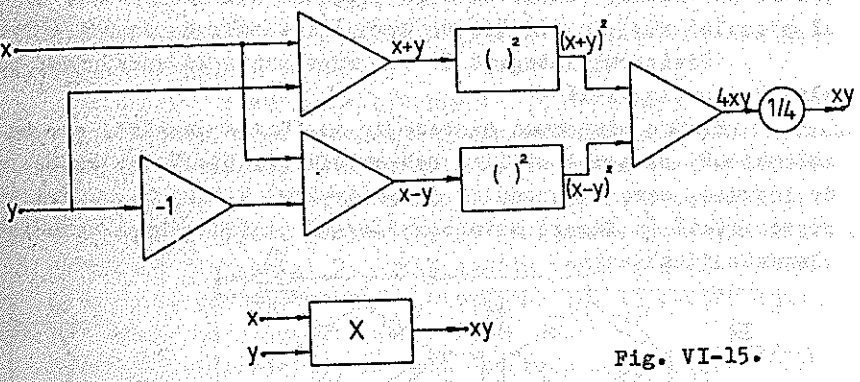


Fig. VI-15.

multiplicatorul din fig. VI-15

.//.

Cu ajutorul multiplicatorului se poate realiza şi un bloc de divizare, reprezentat în fig.VI-16. Din schemă deducem următoarele relaţii:

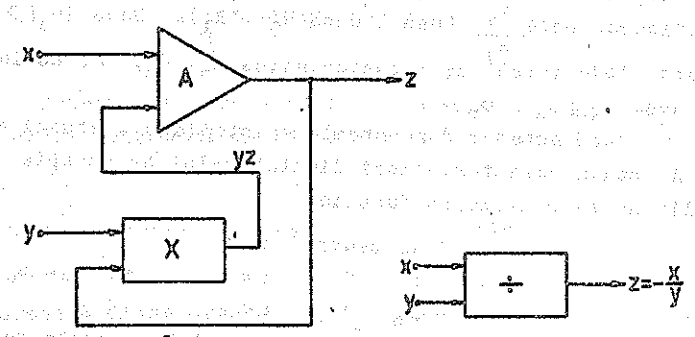


Fig.VI-16

$$Z = A(x+yZ) \quad ; \quad Z = \frac{x}{\frac{1}{A} - y} \cong -\frac{x}{y}$$

Evident, există unele limitări, ca de exemplu $y \gg \frac{1}{A}$; altfel aproximaţia nu este bună. De asemenea se pune problema stabilităţii schemei, ceeace limitează domeniul de lucru eventual şi pentru x. Oricum, schema este întotdeauna aplicabilă într-un cadran al planului xOy, în funcţie de semnul introdus de amplificator.

Divizorul integrat îl vom reprezenta în continuare prin blocul din fig.VI-16 -

Pentru simularea sistemelor cu, "zonă moartă", sau cu fiecare columbiană, se poate utiliza schema din fig.VI-17. V_i este semnalul de intrare, care este anulat în intervalul $V_- \leq V_i \leq V_+$ .Caracteristica reprezentată în figură este considerată pentru schema care conţine elemente idealizate.

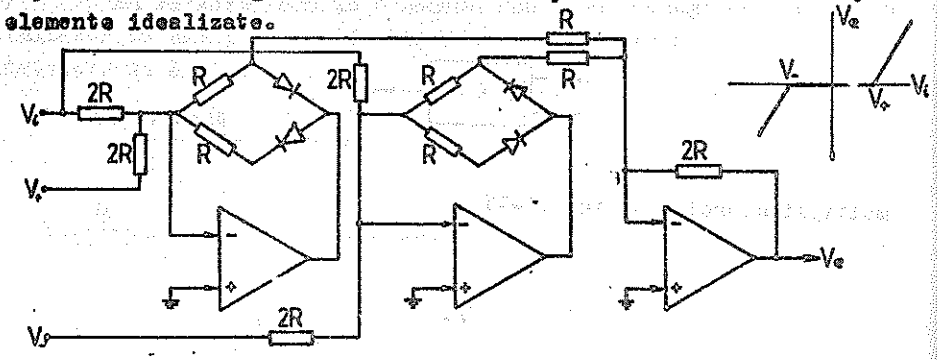
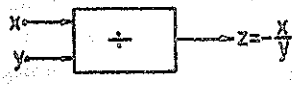


Fig.VI-17.

se poate realiza şi un bloc
Din schemă deducem următoarele

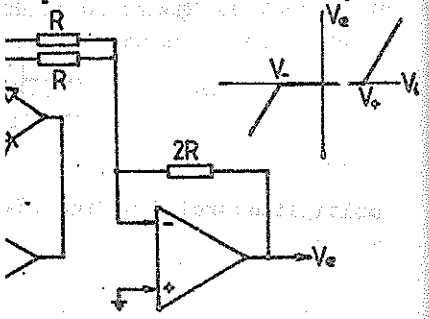
—z



$$\frac{x}{\frac{1}{A}-y} \simeq -\frac{x}{y}$$

i, ca de exemplu $y \gg \frac{1}{A}$;
emenea se pune problema stabi-
miul de luoru eventual şi
una aplicabilă într-un cadran
introdus de amplificator.
rezenta în continuare prin

, "zonă moartă", sau cu fiecare
în fig.VI-17. V_i este semnalul
alul $V_- \leq V_i \leq V_+$ .Caracteristica
ă pentru schema care conţine



VI-4. Alte aplicaţii.

In unele aplicaţii sînt necesare generatoare de joasă frecvenţă (audio), dar cu semnale sinusoidale, cu distorsiuni sub 1%. Distorsiunile sînt considerate aci în următorul sens: dacă un semnal este periodic, dar nu este perfect sinusoidal, atunci conţine armonici conform dezvoltării în serie Fourier. Se numeşte factor de distorsiune raportul dintre valoarea eficace a armonicelor şi amplitudinea (maximă) a semnalului sinusoidal. Dacă semnalul este pur sinusoidal, atunci valoarea eficace a armonicelor este zero, iar factorul de distorsiuni este şi el zero. In practică, distorsiunile de acest gen sînt considerate neglijabile dacă sînt sub 1%, în multe aplicaţii. Un generator de semnale sinusoidale este reprezentat în fig.VI-18.

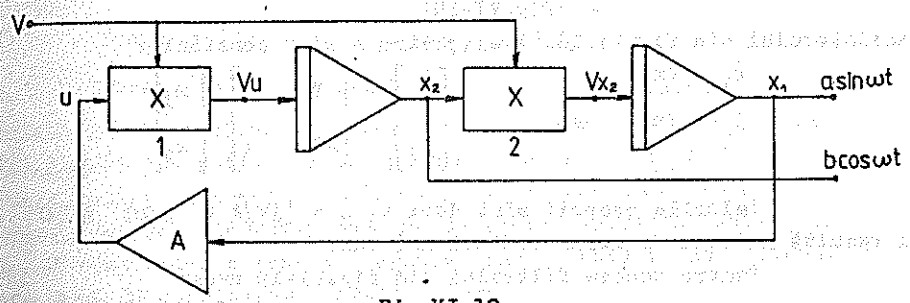


Fig.VI.18

Schema realizează soluţia unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, de tipul

$$a.\cos\omega t + b \sin.\omega t$$

unde constantele a şi b se precizează prin valorile din schemă, rezultînd soluţiile particulare dela bornele de ieşire ale schemei. Cele două multiplicatoare au rolul de a modifica fiecare constantă de integrare a integratorului respectiv, în funcţie de potenţialul V, cu care se determină frecvenţa. Cu unele complectări, această schemă furnizează semnale sinusoidale cu distorsiuni sub 1% pentru ambele semnale de ieşire, la frecvenţe $100 \div 1000$ Hz.

In capitolul precedent au fost descrise numai cîteva tipuri de filtre pasive. Filtrele care conţin amplificatoare operaţionale fac parte din categoria "filtrelor active" şi sînt în general superioare filtrelor pasive. In fig. VI-19 este prezentată o schemă de prin-

.//.

cipiu pentru un filtru activ cu trei ieşiri: trece sus, trece jos şi trece bandă. Să calculăm acum funcţiile de transfer pentru cazul

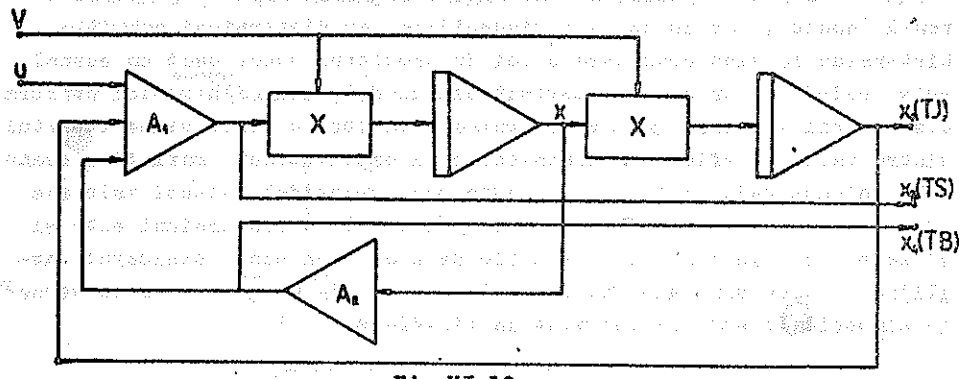


Fig.VI-19

oscilatorului din fig.VI.18. Avem, pentru A şi V constante:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Vx_2 \\ \dot{x}_2 &= Vu \quad \text{sau} \\ u &= Ax_1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V \\ AV & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Valorile proprii sînt deci $x_{1,2} = \pm jV\sqrt{A} = \pm j\omega$; $A > 0$ şi rezultă soluţia de forma arătată mai sus.

Pentru schema filtrului din fig.VI-19 avem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Vx_2 \\ \dot{x}_2 &= VA_1x_1 + VA_1A_2x_2 + VA_1u \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V \\ VA_1 & VA_1A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ VA_1 \end{bmatrix} u$$

Polinomul caracteristic este deci:

$$\chi = \lambda^2 - VA_1A_2\lambda - V^2A_1$$

Pentru stabilitate este necesar ca $VA_1A_2 < 0$ şi $V^2A_1 < 0$ deci $A_1 < 0$, $V > 0$, $A_2 > 0$.

Alegem $A_1 = -1$ şi $A_2 = 1$; rezultă:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V \\ -V & -V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -V \end{bmatrix} u$$

Calculăm acum funcţiile de transfer pentru semnale sinusoidale. Rezultă

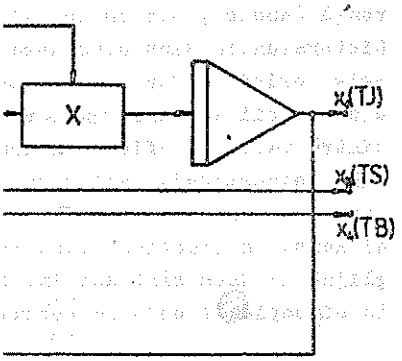
$$\chi(j\omega) = -\omega^2 + jV\omega + V^2$$

Aşadar

$$\frac{x_1}{u} = \frac{V^2}{V^2 - \omega^2 + jV\omega} \qquad \text{(filtru trece jos, TJ)}$$

Pentru $\omega \to 0$ avem $\frac{x_1}{u} \to 1$ iar pentru $\omega \to \infty$ rezultă $\frac{x_1}{u} \to 0$

iri: treco sus, treco jos şi
de transfer pentru cazul



A şi V constante:

$$= \begin{bmatrix} o & V \\ AV & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$_{1,2} = \pm jV\sqrt{A} = \pm j\omega; \quad A > 0$$

sus.

fig.VI-19 avem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & V \\ VA_1 & VA_1A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o \\ VA_1 \end{bmatrix} u$$

deci:

sar ca $VA_1A_2 < o$ şi $V^2A_1 < o$

rezultă:

ransfer pentru semnale sinusoi-

$/^2$

(filtru treco jos, TJ)

ar pentru $\omega \to \infty$ rezultă $\frac{x_3}{u} \to 0$

De asemenea:

$$x_3 = A_1(u + x_1 + A_2x_2) = -(u - \frac{V^2}{\lambda}u - \frac{j\omega X}{\lambda}u) =$$

$$= -\frac{V^2 - \omega^2 + j\omega V - V^2 - j\omega V}{V^2 - \omega^2 + j\omega V} \cdot u$$

Deci:

$$\frac{x_3}{u} = \frac{\omega^2}{V^2 - \omega^2 + j\omega V} \qquad \text{(filtru treco sus, TS)}$$

Într-adevăr, pentru $\omega = o$ avem $\frac{x_3}{u} = o$, iar pentru $\omega \to \infty$ rezultă $\frac{x_3}{u} = -1$.

In fine, la borna cu semnalul x_4 avem

$$\frac{x_4}{u} = -\frac{j\omega V}{V^2 - \omega^2 + j\omega V} = -\frac{1}{1 - j\frac{V^2 - \omega^2}{\omega}}$$

Pentru $\omega \to 0$ avem $\frac{x_4}{u} = o$, pentru $\omega \to \infty$ rezultă de asemenea $\frac{x_4}{u} = o$

Pentru $V = \omega$ apare un maxim $\frac{x_4}{u} = -1$. S-a obţinut un filtru de bandă, TB. Se observă o analogie între acest filtru TB şi oscilatorul din fig.VI-18. Astfel, dacă punem $A_2 = 1$ şi $A_1 = 1$ la filtru, se obţine oscilatorul ($u = o$ şi $V = \omega$). Explicaţia constă în faptul că $A_1 = 1$ realizează reacţia pozitivă care determină apariţia oscilaţiilor, iar $A_1 = -1$ realizează o reacţie negativă care stabilizează sistemul. Evident s-a luat în considerare canalul $u \to x_1$.

In general filtrele active realizează caracteristici superioare celor pasive, dar schemele sînt mai elaborate decît schema de principiu de mai sus.

Pentru simularea unor mecanisme cu histeresis (de ex. motorul hidraulic pentru acţionarea profundorului) este necesară o schemă cu caracteristici de histeresis. Im fig.VI-2o este arătată o schemă de principiu pentru realizarea unei astfel de caracteristici (idealizată).

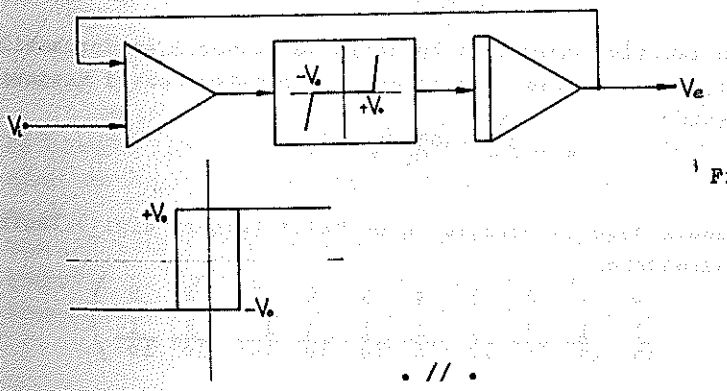


Fig.VI-2o

. // .

Dacă integratorul este suficient de rapid, în intervalul $-V_0 \div +V_0$ păstrează valoarea precedentă, dar comută rapid în punctele $-V_0$ şi $+V_0$, realizînd caracteristica din figură. Cu ajutorul unui bloc histeresis, pot fi generate semnale dreptunghiulare şi triunghiulare, ca în fig. VI-21. Comutarea are loc la $-V_0$ şi la $+V_0$; integrarea semnalului dreptunghiular are ca rezultat un semnal

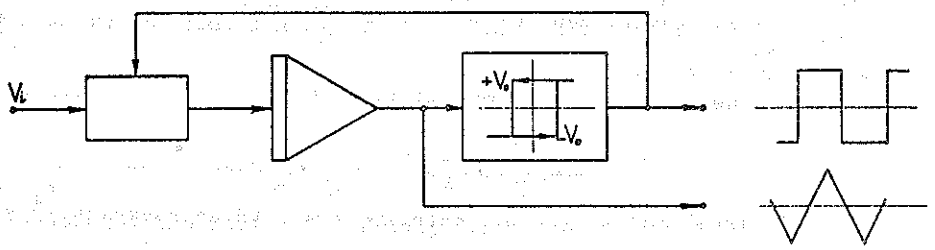


Fig.VI-21

triunghiular, ambele figurate la bornele de ieşire. Multiplicarea semnalului de intrare cu V_i= constant, are drept rezultat modificare constantei de integrare, ceeace realizează o anumită frecvenţă. De exemplu. dacă V_i este luat mai mare, creşte panta semnalului triunghiular, deci comutarea are loc mai rapid, prin urmare frecvenţa creşte.

CAPITOLUL VII.

Noţiuni de teoria transmisiunii informaţiei.

VII-1. Cantitatea de informaţie (entropia)

Să considerăm o variabilă aleatoare binară, cu următoarea repartiţie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Evenimentele constau în apariţia lui 0 sau 1, echiprobabile. Prin definiţie, cantitatea de informaţie asociată acestei variabile aleatoare este

$$H = -\sum_{1}^{2} p_i \log_2 p_i = 1$$

Aceasta este informaţia de un "bit" (binary digit). Pentru variabila aleatoare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

.//.

ntitatea de informatie rezultă în modul următor.

$$H = -\sum_{1}^{10} \frac{1}{10} \log_2 \frac{1}{10} \simeq 3{,}33 \text{ bit} \quad \text{deoarece } H = -\left(\log_2 10\right) \sum_k p_k \log_{10} p_k$$

In cazul în care evenimentele nu sînt echiprobabile, formula se aplică în acelaşi mod;

Să enunţăm acum cîteva proprietăţi ale entropiei.

1. Dacă $p_k = 1$ pentru un k fixat, atunci $p_j = 0$; $j \neq k$ şi avem:

$$H(p_1, \dots, p_n) = 0$$

Din formula entropiei aceasta rezultă din faptul că $\lim_{x \to 0} (x \log x) = 0$

2.- avem :

$$H(p_1, \dots, p_n) \leq H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots \frac{1}{n}\right)$$

Aceasta arată că entropia este maximă atunci cînd repartiţia este uniformă (evenimente echiprobabile). Pentru evenimente echiprobabile avem $p_i = \frac{1}{n}$ şi deci

$$H_0 = -\frac{1}{n} \sum \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n$$

Rezultă deci că:

$$H(p_1, \dots p_n) \leq H_0$$

Se numeşte redonanţă numărul dat de

$$R = 1 - \frac{H}{H_0}$$

care este nulă cînd $H = H_0$, deci cînd H este maxim.

Dacă un expriment B este condiţionat de un alt expriment A putem considera entropia lui B, condiţionat de A, care este dată de formula

$$H_A(B) = \sum_{k=1}^{n} p_k H_k(B) = H(B/A)$$

Prin urmare, fiind date două exprimente oarecare A şi B avem:

$$H(AB) = H(A) + H(B/A)$$

Dacă evenimentele A şi B sînt independente, atunci regăsim formula dată anterior.

Un sistem de transmitere a informaţiei constă dintr-o sursă de semnale (emisia), dintr-un canal prin care se transmit semnale şi dintr-un receptor de semnale. Notăm cu X mulţimea semnalelor care se emit şi cu Y mulţimea semnalelor care se recepţionează. De asemenea notăm cu $p(y/x)$ probabilitatea de recepţionare a semnalului de recepţie y, condiţionată de semnalul de emisie x. Atunci un sistem de transmitere a informaţiei este definit prin tripletul

$$\left[X, p(y/x), Y\right]$$

.//.

Sursa sistemului este definită de tripletul

$$\{X, \mathcal{X}, p(x)\} \qquad \text{cu} \sum_{x \in X} p(x) = 1$$

Recepţia sistemului este definită de tripletul

$$\{Y, \mathcal{Y}, p(y)\} \qquad \text{unde } p(y) = \sum_{x \in X} p(x) p(y/x)$$

Observăm că emisia şi recepţia sînt cîmpuri de probabilitate.

Canalul de transmitere a informaţiei este cunoscut, dacă se cunoaşte $p(y/x)$, pentru orice $x \in X$ şi $y \in Y$. În aceste condiţii, dacă $p(y/x)$ ia numai valorile 0 sau 1, atunci canalul nu prezintă perturbaţii. Dacă $p(y/x)$ nu ia numai valorile 0 sau 1, pentru orice $x \in X$ şi $y \in Y$, atunci canalul prezintă perturbaţii.

Cantitatea de informaţie transmisă de sursă o putem determina cu formula entropiei

$$H(X) = -\sum_{x \in X} p(x) \log_2 p(x)$$

iar pentru recepţie:

$$H(Y) = -\sum_{y \in Y} p(y) \log_2 p(y)$$

Cantitatea medie de informaţie care se pierde pe canal din cauza perturbaţiei este dată de:

$$H(X/Y) = \sum_{y \in Y} p(y) H(X/y) = -\sum_{y \in Y} p(y) \sum_{x \in X} p(x/y) \log_2 p(x/y)$$

Atunci la recepţie apare cantitatea de informaţie

$$H(X) - H(X/Y)$$

Conform cu proprietăţile entropiei avem:

$$0 \leq H(X) - H(X/Y) \leq H(X)$$

Să presupunem, de exemplu, că fiecare semnal recepţionat y provine exact dintr-un semnal x_y ($X \to Y$ este bijecţia). Atunci $p(x/y) = 0$ pentru orice $x \neq x_y$, iar $p(x_y/y) = 1$. Atunci $H(X/Y) = 0$ şi cantitatea de informaţie recepţionată este $H(X)$. Reciproc să presupunem că între sursă şi recepţie nu există nici o dependenţă, din cauza unui zgomot care face imposibilă recepţia vreunui semnal. Atunci x şi y sînt independente şi avem

$$H(X/Y) = H(X)$$

şi deci

$$H(x) - H(X/Y) = 0$$

adică nu se recepţionează nici o cantitate de informaţie.

Numim capacitatea unui canal valoarea

$$C = \max_{p} \left[H(X) - H(X/Y) \right]$$

.//.

Aceasta este cantitatea maximă de informaţie în prezenţa zgomotului.

In continuare vom spune "zgomot" în loc de "perturbaţie", acolo unde acest termen este mai potrivit. Cantitatea de informaţie recepţionată

$$H(X) - H(X|Y)$$

este o valoare medie şi mai poate fi denumită "viteza de transmitere a informaţiei".

Atunci capacitatea unui canal este şi viteza maximă de transmitere a informaţiei prin acel canal.

VII-2. Coduri

Reţinem de mai sus schema unui sistem de transmitere a informaţiei

$$\{X, x, p(x)\} \xrightarrow{p(y/x)} \{Y, y, p(y)\}.$$

Acest sistem este fără codificare. Să denumim acum astfel: X este mulţimea "alfabet de intrare" iar Y este mulţimea,"alfabet de ieşire". Dacă alcătuim cu aceste semnale succesiunea de lungime n,atunci rezultă U mulţimea "cuvintelor de intrare" şi V mulţimea "cuvintelor de ieşire". Aceste mulţimi formează şi ele un sistem de transimtere a informaţiei $[U, p(v/u), V]$ unde=

$$p(v/u) = p(y_1/x_1)\,p(y_2/x_2)\cdots p(y_n/x_n)$$

Trecerea dela sistemul de transmitere a informaţiei $[X, p(y/x), Y]$ la sistemul $[U, p(v/u), V]$ se numeşte codificare, iar legea care asociază semnalelor $x \in X$ şiruri $u \in U$ se numeşte cod - Capacitatea canalului pentru succesiuni de lungime n este nC, deoarece un semnal de lungime n durează de n ori mai mult decît transmiterea unui semnal simplu.

Un exemplu din cele mai simple este următorul: cu semnalele elementare 0 şi 1 se formează un cod pentru numerele din baza zece: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Acesta este un cod *binar-zecimal*. Entropia a fost calculată într-un exemplu precedent, arătîndu-se că entropia maximă (evenimente echiprobabile) este aproximativ 3,33 bit. Atunci rezultă că pentru fiecare cifră din baza zece sînt necesari patru biţi. Pe de altă parte cu patru biţi rezultă $2^4 = 16$ combinări cu repetiţie. Orice alegere de lo cuadruple din cele C_{16}^{10} poate constitui un cod *binar-zecimal*. Din acest motiv, alegerea codului respectiv, este supusă unor specificaţii suplimentare care au condus la codurile *binar-zecimale* utilizate în prezent la calculul numeric.

.//.

Un alt exemplu care poate fi comentat în acelaşi mod este alegerea unui cod *binar* pentru reprezentarea literelor alfabetului, sau un cod care conţine şi literele alfabetului şi cifrele zecimale (cod alfa-numeric). Pentru acesta din urmă sînt necesari 6 biţi care dau $2^6 = 64$ combinaţii cu repetiţie (distincte), din care pot fi alese diferite coduri alfanumerice.

In cazul canalelor perturbate, este posibil să se contruiască coduri care detectează şi corectează un număr de erori. Cel mai simplu exemplu este bitul de paritate utilizat la calculatoarele numerice. Să presupunem, de exemplu, că lungimea cuvîntului este de 32 biţi. Pentru fiecare cuvînt se numără semnalele 1 conţinute în cuvîntul respectiv; dacă acest număr este par se adaugă un zero, iar dacă este impar se adaugă 1. In acest mod s-a realizat un cod cu detectarea unei singure erori, dar fără corecţie. Evident, două erori nu pot fi detectate, deoarece se revine la paritatea iniţială. Să presupunem acum că în loc de un singur bit de paritate, se adaugă la cuvînt un număr m. de biţi. Atunci este de aşteptat să existe posibilitatea detectării unui număr mai mare de erori, precum şi posibilitatea corectării unora dintre ele. Un astfel de exemplu este codul Hamming reprezentat în tabelul care urmează. Simbolurile informaţionale sînt a_3, a_5, a_6, a_7 (cele subliniate). Ele reprezintă numărarea în *binar* dela 0 la 15. Simbolurile a_1, a_2, a_4 permit corectarea unei singure erori, dar la orice poziţie. Pentru a întui principiul, recurgem la o reprezentare geometrică. Interpretăm septetul de biţi drept coordonate într-un spaţiu cu dimensiunea 7. Toate septetele posibile sînt $2^7 = 128$ combinări cu repetiţie.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Reprezentăm aceste coordonate printr-un poliedru regulat cu 128 de vîrfuri. Numim "distanţa" dintre vîrfuri ca fiind numărul minim de muchii care trebuesc parcurse dela un vîrf la altul. Aşadar, vîrfurile vecine se află la distanţa 1. Observăm că o singură eroare în codul din tabel se află la distanţa 1 de litera din cod. Dacă orice altă literă se află la distanţa 3 de litera considerată, atunci se vede că eroarea poate fi corectată imediat. Să luăm ca exemplu prima literă 0000000. Toate celelalte litere conţin cel mult 4 zerouri, prin urmare distanţa minimă faţă de această literă este 3. Aşadar oricare

.//.

din zerouri trece în 1 este detectat şi corectat ca eroare. Pentru orice altă literă din cod se obţine acelaşi rezultat. Deoarece informaţia transmisă este de 4 biţi, iar litera din cod conţine 7 biţi, rezultă că codul este redondant, dar se cîştigă în fiabilitate,deoarece acest cod tolerează o eroare.

Un alt exemplu de cod, utilizat în prezent în navigaţia cosmică şi aero, este codul pseudoaleator. Să luăm ca exemplu şirul de 15 biţi:

ooolooll0l0llll

şi să separăm şirurile de 0 şi şirurile de 1:

ooo 1 oo 11 o 1 o 1111

1 2 3 4 5 6 7 8

Acest şir satisface următoarele criterii:

1- numărul de zerouri se deosebeşte de numărul de 1 cel mult cu o unitate, pentru întregul şir; într-adevăr, şirul de 15 biţi conţine 7 zerouri şi 8 unităţi.

2- Descompus în şiruri omogene (0 sau 1),jumătate din ele au lungimea 1, un sfert au lungimea 2, o optime are lungimea 3,etc. Astfel şirurile omogene de 1 sînt în număr de 4 iar cele omogene de 0 sînt 4, deci jumătate. Un sfert din ele, adică 2, au lungimea 2(nr.3 şi nr.4), etc.

3- La o deplasare ciclică a şirului, pentru o perioadă întreagă (adică la 15 deplasări, cînd se revine la şirul iniţial),numărul de poziţii de coincidenţă diferă cu 1 faţă de poziţiile care nu coincid. De exemplu:

ooloollolollllo

coincide cu precedentul doar în 7 din cele 15 poziţii,deci nu coincide în 8 poziţii.

Să presupunem acum că alegem o literă şi îi asociem toate permutările ciclice ale şirului de mai sus. Atunci, pentru un observator care nu cunoaşte codul, mesajul pare aleator (deşi de fapt nu este aleator). Din acest motiv este denumit pseudoaleator.Obţinerea caracteristicelor deterministice ale codurilor pseudo-aleatoare necesită un timp lung de observaţie, chiar la vitezele de transmitere a informaţiei utilizate în prezent. Din acest punct de vedere ele sînt caracterizate prin "timp", care de fapt reprezintă lungimea unei succesiuni; de exemplu, în prezent sînt în uz coduri pseudo-aleatoare cu lungimea de o săptămînă pînă la 1 an.

In prezent, teoria codurilor este mult dezvoltată şi conţine coduri liniare (ca exemplele date mai sus) coduri ciclice, coduri convoluţionale, coduri aritmetice,coduri cu pătrate magice,coduri sincronizatoare,etc.

.//.

VII - 3 Modulaţia

Să presupunem că un emiţător transmite un semnal sinusoidal

$$A\sin(\omega t + \varphi)$$

unde A, ω şi φ sînt constante precizate. Pentru cel care recepţionează, acest semnal conţine o cantitate de informaţie nulă, deoarece probabilitatea sa de apariţie este 1.-

Dacă însă acest semnal este întrerupt şi restabilit, atunci se asociază evenimentul binar 0 şi 1, astfel încît cantitatea de informaţie transmisă nu mai este 0. In principiu, ceea ce se poate modifica la un semnal sinusoidal, astfel încît să poarte informaţie este :

A	modulaţia de amplitudine	(MA)
ω	modulaţia de frecvenţă	(MF)
φ	modulaţia de fază	(MP)

Pentru modulaţia semnalelor cu impulsuri de formă dreptunghiulară, considerăm un singur impuls de amplitudine A_k şi de durată (t_k, t_{k+1}). Atunci avem forma :

$$A_k(h_k - h_{k+1}) \; ; \; K \in N$$

unde h_k este treapta Heaviside cu saltul în punctul t_k, respectiv t_{k+1}. Dacă A_k este constantă, $t_k = KT$, $K \in N$, T = constantă şi $t_{k+1} - t_k = \tau < T, \tau =$ constant, atunci semnalul păstrează aceeaşi formă în timp, deci este deterministic, prin urmare de entropie nulă,

Pentru a transmite informaţie pot fi variabile în timp:

A_k = modulaţia de amplitudine
τ : modulaţia de durată
T_k = modulaţia în poziţie a impulsului

Fără a intra în detalii de proiectare a schemelor de modulaţie, vom analiza în continuare aspectele mai importante ale modulaţiei.-

Pentru modulaţia de amplitudine vom considera un semnal de forma :

$$f(t) = A(t) \cdot \sin\omega t.$$

unde ω = constantă, se numeşte "frecvenţa purtătoare". In ceea ce priveşte amplitudinea acestui semnal, riguros vorbind, ea este definită în puncte discrete pe axa timpului, deoarece amplitudinea unei sinusoide se determină cel puţin într-o semiperioadă. Practic însă, $A(t)$ poate fi considerată continuă şi chiar constantă pentru intervalul $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, deoarece modulaţia nu are sens pentru variaţii semnificative în decursul unei perioade T. Pe de altă parte $A(t) > 0$ deoarece, "aplitudinea negativă" nu are sens în acest context. Cu aceste precizări, schema de modulaţie de amplitudine este un simplu multiplicator cu o intrare $A(t)$

și cealaltă intrare sin ωt. Menționăm că pînă nu de mult schemele practice de modulatoare erau utilizate ca multiplicator; în prezent situația este inversată.

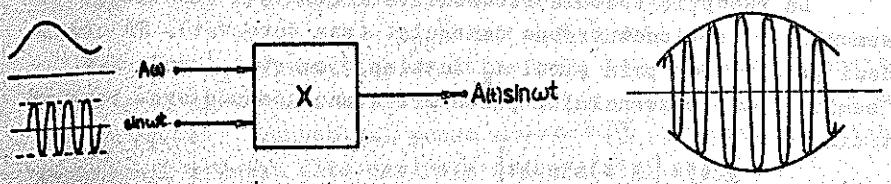


Fig. VII-1

Un caz particular interesant este acela cînd A(t) are o formă sinusoidală, ca de exemplu:

$$A(t) = A(1 + m \sin \Omega t) \quad ; \quad 0 \leq m \leq 1$$

unde A este constant iar m se numește gradul de modulație. Evident $\Omega \ll \omega$ reprezintă frecvența semnalului modulator. Atunci, pentru semnalul modulat avem

$$f(t) = A(1+ m \sin \Omega t)\sin \omega t = A\sin\omega t + \frac{mA}{2}\cos(\omega-\Omega)t - \frac{mA}{2}\cos(\omega+\Omega)t$$

Rezultă că acest semnal este suma a trei semnale sinusoidale - purtătorul, de frecvență ω, și două "benzi laterale" de frecvență $\omega+\Omega$ și $\omega-\Omega$. Puterea semnalului modulat se exprimă prin

$$A^2\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$$

adică în benzile laterale apare cel mult jumătate din puterea semnalului purtător. Deoarece benzile laterale sînt simetrice față de purtătoare, pot fi efectuate transmisii care utilizează o singură bandă laterală. Analiza benzilor este utilă și pentru a stabili lărgimea în bandă a canalului respectiv. Într-adevăr, pentru semnale telegrafice banda este îngustă; ea crește în telefonie, în radiodifuziune (30÷16.000 H_z) și ajunge la 25 H_z ÷ 6MH$_z$ pentru canalul video din televiziune. Legătura cu capacitatea unui canal este imediată; este ușor de intuit că H(X), considerînd canalul fără perturbații, crește odată cu banda de trecere, în exemplele enumerate mai sus.

În cele ce urmează vom avea nevoe de reprezentarea semnalelor modulate în amplitudine ca în fig.VII-1. Dacă interesează

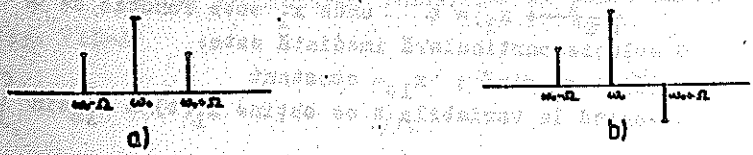


Fig.VII-2

.//.

numai frecvenţele, reprezentarea va fi ca în fig.a), iar dacă apar şi benzi defazate cu π (opuse ca fază) ca în fig.b). Pentru semnalul f(t) de mai sus, reprezentarea completă este cea din fig.VII-2,b).

La recepţie trebuie restabilită informaţia transmisă, adică semnalul recepţionat trebue demodulat (sau detectat). Să considerăm deci pe A(t) dat prin şirul A_k în timp discret t_k, unde $K \in N$ numără semiperioadele semnalului purtător. Atunci demodularea rezultă imediat din

$$g(t) = |A(t)\sin\omega t|$$

dacă extragem componenta medie utilizînd un filtru T_J, ca în fig.VII-3

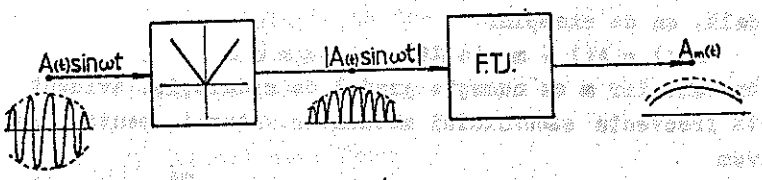


Fig. VII-3

Intr-adevăr avem:

$$A_{mk} = \frac{2}{T}\int_{kT}^{kT+\frac{T}{2}} A_k \sin\omega t\, dt = -\frac{A_k}{\pi}\left[\cos\omega t\right]_{kT}^{kT+\frac{T}{2}} = \frac{A_k}{\pi}$$

Pentru studiul modulaţiei de frecvenţă revenim la schema din fig.VI-18; rescriem ecuaţiile pentru A= -1, dar pentru V variabil în timp şi V>0:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Vx_2 \\ \dot{x}_2 = -Vx_1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \ddot{x}_1 = \dot{V}x_2 + V\dot{x}_2 = \frac{\dot{V}}{V}\dot{x}_1 - V^2x_1$$

sau $\frac{1}{V}\ddot{x}_1 - \frac{\dot{V}}{V^2}\dot{x}_1 + Vx_1 = 0$ sau

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V}\dot{x}_1\right) + Vx_1 = 0$$

Facem schimbarea de variabilă $\frac{d\tau}{dt} = V$ şi se obţine:

$$V\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{V}V\frac{dx_1}{d\tau}\right) + Vx_1 = 0 \quad \text{sau}$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = 0 \quad \text{unde } x_1 \text{ este funcţie de } \tau$$

O soluţie particulară imediată este:

$x_1(\tau) = x_{10}\sin\tau$; x_{10} = constant

Revenind la variabila t se obţine $x_1(t) = x_{10}\sin\int V dt$.

./.

Pentru V=constant se obţine un semnal sinusoidal, iar pentru V variabil se obţine un semnal modulat în frecvenţă. De exemplu, dacă $V = \omega_0 + \Delta\omega$, unde ω_0 = constant se numeşte frecvenţa purtătoare, iar $\Delta\omega$ deviaţia de frecvenţă, rezultă:

$$x = x_{10} \sin (\omega_0 t + \int \Delta\omega dt)$$

In aplicaţiile practice avem $\Delta\omega \ll \omega_0$, ceeace permite obţinerea unor aproximări utile în calcule de proiectare. Pentru modulaţia cu semnal sinusoidal punem $\Delta\omega = a \sin \Omega t$; In acest caz "frecvenţa" semnalului modulat este derivata argumentului adică:

$$\omega_0 + a \sin \Omega t$$

unde a este deviaţia de frecvenţă faţă de purtătoare, iar Ω frecvenţa semnalului modulator. Pentru studiul benzii de trecere se dezvoltă în serie:

$$f(t) = \sin(\omega_0 t - \frac{a}{\Omega} \cos \Omega t)$$

utilizînd funcţii Bessel. Dacă seria este trunchiată rezonabil, rezultă o bandă de trecere care depinde de a şi de Ω ; se intuieşte faptul că banda de trecere necesară la MF este mai mare decît la MA(pentru aceeaşi purtătoare), deoarece apar nu numai $\omega_0 \pm \Omega$ ci şi $\omega_0 \pm k\Omega$ precum şi alte frecvenţe laterale. Astfel, dată notăm $\beta = \frac{a}{\Omega}$ (indicele de modulaţie), se obţine:

$$\sin(\omega_0 t - \beta \cos \Omega t) = (\sin \omega_0 t)(\cos(\beta \cos \Omega t)) - (\cos \omega_0 t)(\sin(\beta \cos \Omega t))$$

Pentru $\beta = 0$ rămîne semnalul purtător; pentru $\beta \neq 0$ se dezvoltă în serie, utilizînd funcţiile Bessel de specia I-a de diferite ordine şi de argument real β . Pe această cale se obţin unele rezultate practice ca:

- pentru indici de modulaţie mici ($\beta \leq 0{,}4$) banda necesară poate fi exprimată cu 2Ω, ca şi în cazul MA.

- pentru indici de modulaţie mari ($\beta > 4$) banda necesară este 2,5 a ÷3,5 a. De exemplu, pentru $\beta = \frac{75}{15} = 5$ (frecvenţe în KHz) avem $\Delta f_{max} \cong 240$ KHz.

Intre modulaţia de frecvenţă şi modulaţia de fază nu există deosebiri de principiu, deoarece variaţia fazei atrage după sine variaţia frecvenţei şi reciproc.

Pentru demodularea semnalelor MF dăm o schemă de principiu în fig. VII-4.

.//.

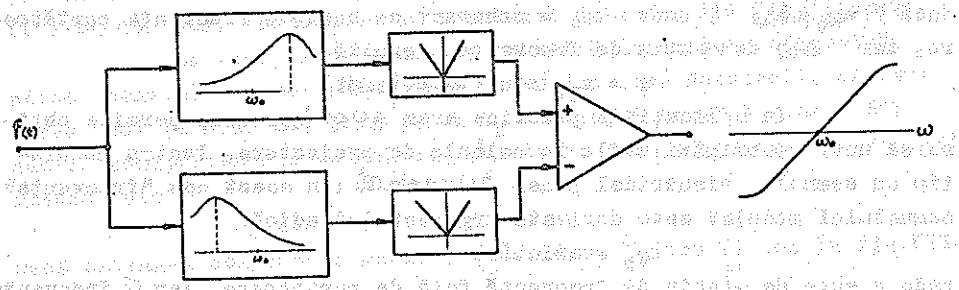


Fig. VII-4

Din caracteristica de frecvenţă se observă că modulaţia de frecvenţă are drept rezultat un semnal modulat în amplitudine, care este demodulat ca atare.

Canalele MF prezintă avantagii importante ca: reducerea distorsiunilor şi zgomotelor.

VII-4. Eşantionare şi restabilire.

Fiind dat un semnal descris în timp continuu f(t) se pune problema reprezentării în timp discret a acestui semnal, prin ordonatele $f(t_k)$, $K \in N$. Evident, dacă intervalele de timp (t_k, t_{k+1}) sînt prea mari, se pierde informaţia asupra lui f(t). Aceasta nu este nu este întotdeauna inutil ; de exemplu, pentru determinarea poziţiei unui AZ interesează coordonatele centrului de masă. Uneori, din cauza fenomenelor aeroelastice şi vibraţiilor, este mai util a elimina prin eşantionare aceste efecte, astfel încît traiectoria să fie descrisă neted. Aceasta face ca în multe aplicaţii valorile $f(t_k)$ să fie luate în mai puţin de 10 puncte pe secundă. In alte aplicaţii frecvenţa de eşantionare (pentru avioane) este sub 50Hz.

Pentru a nu se pierde informaţia asupra lui f(t), Shannon a dat un criteriu $f_e \geq 2 f_M$

unde f_e este frecvenţa de eşantionare, iar f_M este frecvenţa maximă din spectrul lui f(t), care trebue reţinut ca informaţie utilă.

Matematic, un organ de eşantionare se poate descrie, astfel: f(t) este un semnal cu $f : T \to R$ astfel încît pentru t dat f(t) este unic (evident, orice aplicaţie f satisface această condiţie). Atunci

f(t) este multiplicator pentru $\delta(t)$ (distribuţia Dirac) şi avem:

$$\langle f(t)\sum_{k}^{\infty}\delta_k,\ \varphi(t)\rangle = \langle \sum_{k}^{\infty}\delta_k,\ f(t)\varphi(t)\rangle = \sum_{k}^{\infty} f(t_k)\varphi(t_k) =$$

$$= \sum_{k}^{\infty} f(t_k)\langle \delta, \varphi\rangle \qquad k\in N\ ;\ t_{k+1} > t_k$$

Deoarece φ are suport compact seria este local finită şi suma are sens.

Dispozitivele care efectuiază eşantionarea se numesc convertoare analog-numerice.(CAD). Principiul de funcţionare este următorul: la fiecare moment t_k se măsoară, printr-o metodă numerică, ordonata $f(t_k)$. Evident, această măsurare durează un timp mai mare ca zero, dar dacă t_k f(t) este practic constant în acest interval de timp, rezultatul eşalonării este corect.

Se pune acum problema reciprocă : se dă un şir $g(t_k)$ de ordonate exprimate numeric şi se cere să se restabilească semnalul g(t) descris în timp continuu. Pornind dela aceeaş premiză, şi anume că în intervalul (t_k, t_{k+1}) semnalul variază suficient de puţin, organul de restabilire este descris de :

$$g(t) \cong \sum_{0}^{\infty} g(t_k)(h_k - h_{k+1}) = h * \sum_{0}^{\infty} g(t_k)(\delta_k - \delta_{k+1})$$

unde h_k este treaptă Heaviside cu saltul în t_k, respectiv t_{k+1}. Acest g(t) este constant pe intervalul (t_k, t_{k+1}) şi are salturi în punctele t_k.Datorită benzii limitate de trecere a canalelor prin care se transmit aceste semnale, la ieşire aceste semnale apar suficient de netede. Dispozitivul care realizează restabilirea se numeşte convertor numeric - analogic (CDA).-

In prezent convertoarele AD şi DA se construiesc integrate, fiecare într-un singur element din schemă. In continuare vor fi reprezentate în scheme printr-un dreptunghi, ca în fig. VII-5.

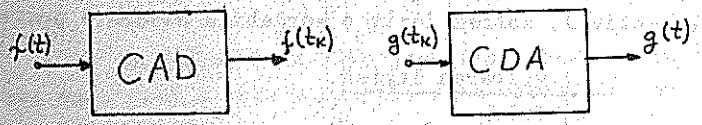


Fig. VII-5

Prezenţa calculatoarelor numerice la bordul AZ face necesară trecerea dela semnale în timp continuu la timp discret şi reciproc, astfel încît apar şi convertoarele AD şi DA.-

.//.

CAPITOLUL VIII
Noţiuni de automate finite.

VIII-1. Noţiuni de algebră

Definim adunarea a două numere naturale diferite de zero m, n∈N, care are drept rezultat tot un număr natural diferit de zero, convenind ca orice număr natural (≠0) să fie reprezentat prin 1. Aşadar

- orice număr natural diferit de zero este reprezentat prin 1;
- zero este reprezentat prin 0.

Aşadar rezultă următoarea tabelă a adunării

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 0$$
$$1 + 1 = 1$$

Pentru produsul numerelor naturale procedăm în mod analog, adică orice produs diferit de zero este reprezentat prin 1 şi orice produs nul prin 0. Rezultă următoarea tabelă a produsului:

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$

Observăm că tabela de adunare este suma modulo doi, iar tabela de înmulţire este cea pentru sistemul binar de numărare. Aceste reguli de calcul sînt necesare pentru algebra propoziţională (algebra logicii) utilizată la descrierea automatelor finite şi schemelor logice.

Introducem următorul postulat = orice propoziţie poate fi sau adevărată, sau falsă, altă posibilitate fiind exclusă (tertium non datur). Fiecărei propoziţii îi asociem o variabilă binară, care ia valoarea "adevărat" sau "fals". Aceste valori logice se pun în corespondenţă cu 1, respectiv 0, astfel încît o variabilă binară a poate lua valorile

a	valoarea logică
0	fals
1	adevărat

De exemplu, putem asocia convenţional variabila "a" propoziţiei "contactul "a" este închis". Această propoziţie poate fi adevărată (a=1) sau falsă (a=0).

Propoziţie "contactul a nu este închis" este negaţia formală a propoziţiei "a". Negaţia o notăm cu o bară deasupra variabilei

.//.

respective, astfel încît $\bar{a}$ se citeşte "non a". Rezultă imediat

a	$\bar{a}$
o	1
1	o

$\bar{1} = o$

$\bar{o} = 1$

Principiul dublei negaţii în logica formală spune că o dublă negaţie este o afirmaţie. Într-adevăr "nu este adevărat că contactul a nu conduce" este o dublă negaţie a propoziţiei a, şi este adevărată cînd a este adevărată, sau falsă cînd a este falsă. Avem deci

$$\bar{\bar{a}} = a$$

ceea ce se verifică uşor cu tabela logică:

a	$\bar{a}$	$\bar{\bar{a}}$
o	1	o
1	o	1

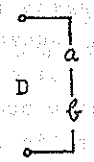
Unele propoziţii sînt dependente de altele; într-adevăr, pot fi construite funcţii logice de variabile binare. Evident, domeniul de valori va fi tot o,1. Funcţiile elementare sînt conjuncţia şi disjuncţia, definite în cele ce urmează.

Să luăm ca exemplu propoziţiile:

a ~ "contactul a este închis"

b ~ "contactul b este închis"

D ~ "dipolul D conduce"



Observăm imediat că D este adevărată numai cînd simultan a şi b sînt adevărate şi falsă în toate celelalte cazuri. Această funcţie este descrisă de tabela logică:

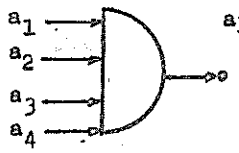
a	b	D
o	o	o
o	1	o
1	o	o
1	1	1

D = ab

Scrierea D=ab este justificată de tabela pentru produs, dată mai sus. Dacă D este o funcţie de n variabile, avem:

$$D = \prod_{1}^{n} a_i = \begin{cases} 1 & a_i = 1 \text{ (pentru orice i)} \\ o & \text{T.C.C. (toate celelalte cazuri)} \end{cases}$$

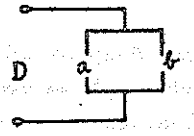
In schemele electronice, elementul care efectuiază operaţia produs logic este denumit "şi". Reprezentarea în scheme o vom da prin:



$a_1 a_2 a_3 a_4 = \prod_{1}^{4} a_i$

o//o

Cu aceleaşi propoziţii de mai sus, dar cu contactele conectate în paralel, realizăm următoarea tabelă logică:



a	b	D
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$D = a+b$

Aşadar D este falsă numai cînd a şi b sînt simultan false, şi este adevărată în toate celelelte cazuri. Să reluăm acum cele două definiţii:

Conjuncţia: propoziţia ab este adevărată numai cînd simultan a şi b sînt adevărate şi falsă în toate celelalte cazuri

Disjuncţia: propoziţia a + b este falsă numai cînd simultan a şi b sînt false şi adevărată în toate celelalte cazuri

Observăm că aceste două propoziţii se obţin una din cealaltă dacă înlocuim "adevărat" cu "fals" şi reciproc, şi dacă înlocuim între ele semnele . şi +, adică produsul logic cu suma logică şi reciproc. Rezultă de aci o proprietate de dualitate algebrică cu utilitatea că orice demonstraţie implică şi cazul dual.

Pentru calcule este necesar o regulă de prioritate între produs şi sumă; vom proceda în modul uzual, adică produsul are prioritate faţă de sumă, astfel încît se evită o serie de paranteze. De exemplu prin expresia a+bc se înţelege de fapt a+(b c).

Regulile de calcul ale algebrei logice sînt concentrate în tabelul care urmează :

$(a+b)+c = a+(b+c)$	; $(ab)c = a(bc)$	;	asociativitate
$a+b = b+a$	; $ab = ba$	;	comutativitate
$a+\bar{a} = 1$	; $a\bar{a} = 0$	;	terţul exclus, contradicţia
$a+a = a$	; $aa = a$	;	tautologia
$a+0 = a$	; $a0 = 0$	; }	legile lui 0 şi 1 .
$a+1 = 1$	; $a.1 = a$	; }	
$a(b+c) = ab+ac$	; $a+bc=(a+b)(a+c)$	;	distributivitate
$a+ab = a$	; $a(a+b) = a$	;	absorbţie
$\overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}$	; $\overline{ab} = \bar{a}+\bar{b}$	;	formulele lui de Morgan

.//.

Aceste reguli de calcul au mai fost întîlnite în teoria mulţimilor; aici vor fi utilizate pentru analiza şi sinteza schemelor logice. Demonstrarea proprietăţilor de mai sus se poate face prin tabele logice. De exemplu, să demonstrăm proprietatea de distributivitate $a+bc=(a+b)(a+c)$. Domeniul de definiţie se construieşte ştiind că trei variabile binare dau 2^3 combinări cu repetiţie de o şi 1. Pentru a le obţine numărăm în binar şi rezultă colcanele a, b, c

a	b	c	a+bc	(a+b)(a+c)
o	o	o	o	o
o	o	1	o	o
o	1	o	o	o
o	1	1	1	1
1	o	o	1	1
1	o	1	1	1
1	1	o	1	1
1	1	1	1	1

Dacă la două aplicaţii domeniile de definiţie coincid, iar domeniile de valori coincid şi ele, atunci cele două aplicaţii sînt identice. S-a obţinut deci demonstraţia dorită. Ca exerciţiu, să demonstrăm pe aceeaşi cale una din formulele de Morgan:

a	b	ab	$\overline{ab}$	$\bar{a}+\bar{b}$
o	o	o	1	1
o	1	o	1	1
1	o	o	1	1
1	1	1	o	o

deci $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$

Formulele lui de Morgan exprimă o regulă de dualitate: o expresie negată este echivalentă cu o altă expresie, obţinute prin negarea variabilelor şi schimbarea sumelor + şi · între ele. De exemplu

$$\overline{abc} + \overline{\bar{a}bc} = (\bar{a}+b+\bar{c})(a+\bar{b}+\bar{c})$$

Pentru un număr dat,finit, de variabile binare, există un număr finit de aplicaţii posibile care rezultă. De exemplu pentru două variabile a,b, domeniul de definiţie conţine $2^2 = 4$ puncte.Fiecărui punct din domeniul de definiţie îi corespunde un singur punct în domeniul de valori, care poate fi O sau 1. Rezultă imediat că există numai $2^4 = 16$ aplicaţii distincte posibile. Acestea sînt concentrate în următorul tabel, în care ordinea lor s-a obţinut prin numărarea în binar.Ţinînd seama de regula de dualitate, analizăm 8 funcţii

.//.

a	b	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$c_1 = 0$; $c_{16} = 1 = \bar{c}_1$

$c_2 = ab$; $c_{15} = \bar{a}+\bar{b} = \bar{c}_2$

$c_3 = a\bar{b}$; $c_{14} = \bar{a}+b = \bar{c}_3$

$c_4 = a$; $c_{13} = \bar{a} = \bar{c}_4$

$c_5 = \bar{a}b$; $c_{12} = a+\bar{b} = \bar{c}_5$

$c_6 = b$; $c_{11} = \bar{b} = \bar{c}_6$

$c_7 = a\bar{b}+\bar{a}b$; $c_{10} = (a+\bar{b})(\bar{a}+b) = \bar{c}_7$

$c_8 = a+b$; $c_9 = \bar{a}\bar{b} = \bar{c}_8$

împreună cu dualele lor (prin negaţie). Unele din aceste funcţii sînt utilizate prin definirea unor operaţii logice; de exemplu:

$$\bar{a}b + a\bar{b} = a \oplus b \quad \text{("sau" exclusiv)}$$

Dualul său este:

$$(a+\bar{b})(\bar{a}+b) = a \overline{\oplus} b$$

De asemenea prezintă însemnătate operatorul lui Sheffer :

$$\overline{ab} = a \uparrow b \quad \text{cu dualul} \quad \bar{a} + \bar{b} = a \downarrow b$$

În aplicaţii se utilizează blocuri integrate ("chip"-uri) care realizează direct aceste operaţii, reprezentate ca în fig.VIII-1. Evident, în prezent se realizează blocuri integrate care efectuează

Fig.VIII-1.

operaţii logice diverse, prin combinarea dorită a operatorilor logici. De exemplu, se observă imediat că $a \oplus b$ este suma modulo 2, astfel că acest bloc apare în numărătoare, sumatoare, etc.

Un alt exemplu util este $c_{14} = \bar{a} + b$, denumit "implicaţie", definită logic astfel: propoziţia care arată sau că a este falsă, sau că b este adevărată, sau că simultan a este falsă şi b adevărată. Dualul său, ca implicaţie este $c_{12} = a \leftarrow \bar{b}$.

Cu titlu de exerciţiu, să arătăm că :

1. $a \downarrow a = \bar{a} = 1 \oplus a$

.//.

13	c_{14}	c_{15}	c_{16}
	1	1	1
	1	1	1
	0	1	1
	1	0	1

b)= $\bar{c}_7$

din aceste funcţii sînt
; de exemplu:
usiv)

torul lui Sheffer :
+ $\bar{b}$ = a⊥b
integrate ("chip"-uri)
ezentate ca în fig.VIII-1.
tegrate care efectuează

ităţi a operatorilor logici.
suma modulo 2, astfel că
tc.
b, denumit "implicaţie",
i sau că a este falsă, sau
falsă şi b adevărată. Dua-

că :

Intr-adevăr $a \perp a = \bar{a} \cup \bar{a} = \bar{a}$

$1 \oplus a = \bar{1}a + 1\bar{a} = \bar{a}$

2. $(a \perp b) \perp (a \perp b) = ab$

Intr-adevăr: $\overline{(\bar{a}+\bar{b})} + \overline{(\bar{a}+\bar{b})} = ab + ab = ab$

3. $(a \top b) \top (a \top b) = a + b$

Intr-adevăr: $\overline{\bar{a}\bar{b}} \cdot \overline{\bar{a}\bar{b}} = (a+b)(a+b) = a+b$

Utilizarea unor astfel de blocuri permite realizarea unor scheme care pot satisface unele specificaţii ca : realizarea unei scheme cu minimum de blocuri, realizarea unor scheme de mare fiabilitate, etc.

Pentru aplicaţii prezintă însemnătate şi formele canonice; de exemplu, se obţine o formă canonică "disjunctivă" de trei variabile, dacă termenii conţin toate cele 3 variabile negate sau nu, în forma de produs, iar toţi termenii sînt legaţi prin sumă. De exemplu

$$W = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c}$$

este o formă canonică disjunctivă. Maximum posibi de termeni în acest exemplu este $2^3 = 8$. In această formă canonică este suficient ca un singur termen să ia valoarea 1 pentru ca întreaga expresie să ia valoarea 1. Ca exerciţiu să se arate că pentru max-termenii avem întotdeauna W=1.

Dualul este forma canonică conjunctivă

$$D = (\bar{a}+\bar{b}+c)(a+b+\bar{c})$$

Aici este suficient ca unul singur din termeni să ia valoarea zero şi atunci D = o. Ca exerciţiu, să se arate că dacă D conţine toţi cei 8 termeni posibili, atunci D= o .

VIII-2. Sisteme cu comandă directă.

Să analizăm schema din fig.VIII-2;contactele notate cu a sînt acţionate de acelaş buton de comandă,evident, la acţionarea

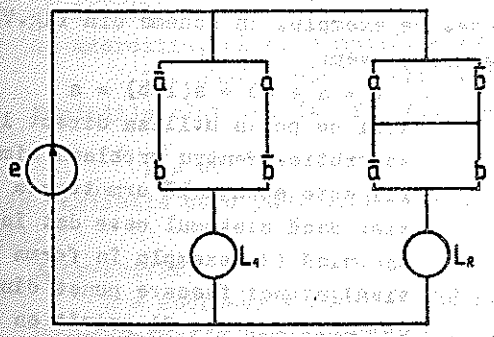


Fig.VIII-2.

butonului contactele notate cu a se închid, iar cele notate cu $\bar{a}$ se deschid (negaţia lui a). Tot astfel stau lucrurile cu contactele notate cu b sau $\bar{b}$, etc. L_1 şi L_2 sînt becuri, fiecare din ele avînd două stări: aprins şi stins. Cu propoziţia "becul este aprins", avem L = 1 pentru "adevărat" şi L = o pentru "fals". Evident, becul este aprins cînd dipolul în serie cu el conduce. Atunci putem scrie:

$$L_1 = \bar{a}b + a\bar{b} = a \oplus b$$

$$L_2 = (a+\bar{b})(\bar{a}+b) = a \oplus b$$

Această schemă poate fi privită ca un sistem cu comandă U şi starea X. Într-adevăr, mulţimea comenzilor este dată de toate modurile în care pot fi acţionate butoanele. Aşadar :

$$U = \{oo, ol, ll, lo\}$$

Fiecărui punct din U îi corespunde un punct (şi numai unul) în X. Atîta timp cît se menţine o comandă anume(de exemplu ll,ambele butoane acţionate),starea respectivă(unică)se menţine indefinit în timp. Din aceste motive, sistemele respective au fost denumite "cu comandă directă". Sistemul din fig.VIII-2 poate fi analizat descriind aplicaţia U→X printr-un tabel logic, după cum urmează:

a	b	L_1	L_2
o	o	o	1
o	1	1	o
1	o	1	o
1	1	o	1

Acest tabel descrie complect dinamica sistemului dat,deoarece la fiecare comandă se cunoaşte starea care rezultă,pentru toate comenzile posibile. Această problemă este denumită "problema de analiză", cînd se dă sistemul şi se cere dinamica sa (răspunsul la comenzi). In problema de analiză se poate pune de exemplu problema simplificării schemei, astfel încît U →X este acelaşi, dar realizarea sa este efectuată cu mai puţine contacte. De exemplu, în schema din fig.VIII-3 contactul b este inutil deoarece avem:

$$L = a + ab = a(1+b) = a$$

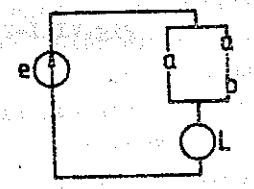


Fig.VIII-3

Aici se putea utiliza direct legea de absorbţie. Pentru problema simplificării este esenţială următoarea observaţie: dacă sistemul este dat în forma canonică (de exemplu în forma disjunctivă),atunci fiecare punct din spaţiul comenzilor poate fi privit ca un

.//.

punct dat prin coordonatele sale, în spaţiul cu dimensiunea vectorului de comandă, pe care-o notăm cu m.Aceste puncte formează un poliedru regulat; anterior am mai definit distanţa dintre două puncte ca fiind numărul minim de laturi parcurse de la un punct la altul.Observăm că dacă distanţa este 1, atunci cei doi termeni adiacenţi diferă numai printr-un bit. Această proprietate este folosită la simplificare.Pentru ilustrarea metodei, să considerăm un sistem cu m= 4 şi o singură stare. Vîrfurile poliedrului pentru dimensiunea 4 pot fi reprezentate prin tabelul următor: Capetele liniilor şi coloanelor reprezintă comenzile, iar în interiorul tabelului sînt precizate stările care rezultă sub acţiunea comenzilor, la încrucişarea liniei cu coloana respectivă. De exemplu, în 23 se trece starea care rezultă sub comanda 1101.Distanţele de lungime 1 determină poziţiile vecine. Astfel,pentru 24 se află la distanţa 1 căsuţele 14,23, 34 şi 21. Pentru 44 căsuţe vecine sînt 34, 43, 14, şi 41. Să presupunem acum că se dă sistemul:

ab \ cd	00	01	11	10
00	11	12	13	14
01	21	22	23	24
11	31	32	33	34
10	41	42	43	44

$$L = a\bar{b}cd + a\bar{b}\bar{c}d + abcd + ab\bar{c}\bar{d}$$

Rezultă L = 1 pentru comenzile: 1011, 1001, 1111, 1010, situate respectiv la poziţiile 34, 24, 33, 44. Atunci avem direct:

$$L = a\bar{b}d + acd + ab\bar{c}$$

deoarece asocierea termenilor 34 cu 24 ne dă:

$$a\bar{b}cd + a\bar{b}\bar{c}d = a\bar{b}d(c+\bar{c}) = a\bar{b}d$$

Asocierea termenilor 34 cu 44 are ca rezultat

$$a\bar{b}cd + a\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}c(d+\bar{d}) = a\bar{b}c \quad \text{ş.a.m.d.}$$

Esenţial este faptul că poziţiile sînt la distanţă 1; comenzile vecine diferă numai printr-un bit, ceeace se observă la capetele coloanelor şi liniilor.

Ca exerciţiu, să se simplifice expresia:

$$L = a\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$$

Poziţiile sînt 44, 14, 11, 41, toate vecine între ele.Atunci avem

$$L = \bar{b}\bar{d}$$

singurele variabile care păstrează aceeaşi valoare (0) în toate cele 4 poziţii.

Intr-adevăr:

$$L = a\bar{b}\bar{d}(c+\bar{c}) + \bar{a}\bar{b}\bar{d}(c+\bar{c}) = \bar{b}\bar{d}(a+\bar{a}) = \bar{b}\bar{d}$$

Reprezentările pentru $m > 4$ sînt posibile, dar este mai dificil de lucrat cu ele. Pentru $m < 4$ tabelul se simplifică în mod corespunzător.

.//.

Problema de sinteză a sistemelor cu comandă directă se formulează în modul următor: se dă mulţimea stărilor ca funcţie de comenzi şi se cere realizarea schemei care corespunde acestei aplicaţii. Evident este necesar să se dea un anumit număr de condiţii, care corespund condiţiei de compatibilitate. Dacă se dau mai puţine, atunci rezultă nedeterminare, deci sînt posibile mai multe realizări(dar în număr finit). Dacă se dau mai multe condiţii decît necesare atunci sau se repetă condiţii deja formulate (rezultă compatibilitate) sau se dau contradictorii, în care caz rezultă incompatibilitate.

Să formulăm acum următorul exemplu de sinteză: se cere o schemă cu două butoane şi un bec, supusă la următoarele condiţii: becul să fie aprins numai cînd cele două butoane sînt simultan neacţionate şi aprinsă în toate celelalte cazuri.

Rezultă tabela logică :

a	b	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

a \ b	0	1
0	11 1	12 0
1	21 0	22 0

Din tabela de simplificare rezultă direct $L=\bar{a}\bar{b}$ în forma normală disjunctivă, precum şi $L=(a+\bar{b})(\bar{a}+b)(\bar{a}+\bar{b})$ în forma normală conjunctivă. Cele două expresii sînt echivalente deoarece $(a+\bar{b})(\bar{a}+b)(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{a}\bar{b}$. Simplificarea pentru forma conjunctivă se poate da şi direct din diagrama de simplificare, deoarece 22 este vecin cu 12 şi 21,astfel încît $\bar{L} = a+b$ de unde $L = \overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}$. Zerourile din diagramă reprezintă L=0, deci becul nu este aprins, adică direct $\bar{L} = a+b$, simplificînd 22 cu 12 şi cu 21.

VIII-3.Sisteme secvenţiale

Am văzut că la schemele cu comandă directă,aplicarea unei comenzi determină o stare care nu depinde de stările anterioare ale sistemului, ci numai de comanda dată. Se mai spune că aceste sisteme sînt "fără memorie".

La sistemele secvenţiale, o comandă dată determină o stare care depinde de comanda dată, dar şi de stări anterioare ale sistemului. Se mai spune că aceste sisteme sînt "cu memorie".

Atît sistemele cu comandă directă cît şi cele secvenţiale fac parte din clasa " automatelor finite". In cazul automatelor finite, spaţiul stărilor este o mulţime numărabilă (sau finită).Să introducem

.//.

r cu comandă directă se for-
tărilor ca funcţie de comenzi
nde acestei aplicaţii. Evident
condiţii, care corespund con-
puţine, atunci rezultă ne-
realizări(dar în număr finit).
are atunci sau se repetă con-
ate) sau se dau contradicto-
.

plu de sinteză: se cere o
a următoarele condiţii: becul
sînt simultan neacţionate şi

a \ b	0	1
0	11 1	12 0
1	21 0	22 0

ltă direct L=$\bar{a}\bar{b}$ în forma
)($\bar{a}$+b)($\bar{a}$+$\bar{b}$) în forma normală
valente deoarece (a+$\bar{b}$)($\bar{a}$+b)
junctivă se poate da şi direct
este vecin cu 12 şi 21,astfel
rourile din diagramă reprezin-
direct $\bar{L}$ = a+b, simplificînd

ndă directă,aplicarea unei
de stările anterioare ale
mai spune că aceste sisteme

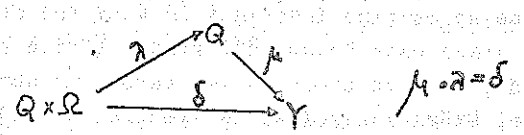
mandă dată determină o stare
tări anterioare ale sistemului.
emorie".
ţă cît şi cele secvenţiale
. In cazul automatelor finite,
ă (sau finită).Să introducem

următoarele notaţii:

$\mathcal{Q}$ mulţimea intrărilor admisibile
Y mulţimea ieşirilor (citirea stărilor)
Q mulţimea stărilor

$\lambda: Q \times \mathcal{Q} \to Q$ funcţia de tranziţie a stărilor
$\delta: Q \times \mathcal{Q} \to Y$ funcţia de ieşire (citire a stărilor)

Rezultă următoarea diagramă, care este comutativă:



$\mu \cdot \lambda = \delta$

Comparînd această diagramă cu cea care rezultă pentru un sistem dinamic în timp continuu, rezultă o aceeaşi formă. De fapt, esenţialul este funcţia de tranziţie a stărilor.

$$Q \longrightarrow Q$$

pentru caracterizarea unui sistem dinamic, deoarece intrarea şi ieşirea pot lipsi.

Pentru descrierea sistemelor secvenţiale vom accepta următoarele convenţii:

1°- Releele se notează cu litere mari X, Y..., iar contactele acţionate de aceste relee cu literele mici corespunzătoare. De exemplu, toate contactele notate cu x sau $\bar{x}$ sînt acţionate de releul X.Evident, pentru X=1 (releul acţionat) vom avea x= 1 (contact normal deschis) şi $\bar{x}$ = 0(contact normal închis).

2°- Deoarece funcţia de tranziţie a stării are ca domeniu de definiţie Qx$\mathcal{Q}$, rezultă că la acţionarea unei comenzi trebue precizată şi starea în care se găseşte sistemul anterior acţionării comenzii.Pentru o reprezentare sub forma de tabel logic, vom conveni ca la capetele de coloană să indicăm comanda respectivă, iar la capetele de linii să indicăm starea anterioară comenzii. Atunci la poziţia care corespunde liniei şi coloanei respective se indică starea care urmează. De exemplu, pentru o schemă cu două comenzi şi două relee,realizăm tabela logică următoare:

xy \ ab	00	01	11	10
1 00		00		
2 01		00		
3 11		01		
4 10				

.//.

Starea indicată la poziţia 3,2 se interpretează în modul următor: sub comanda o1 (adică a neacţionat şi b acţionat) şi pornind din starea 11 (adică releul X acţionat şi releul Y acţionat) rezultă starea o1 (adică releul X neacţionat şi releul Y acţionat)

Dacă în această stare se menţine comanda o1, atunci sub comanda o1 şi starea o1 sistemul trece în oo(poziţia 2,2).Dacă se menţine comanda o1 în continuare, atunci din starea oo sistemul trece în oo, deci starea oo se menţine indefinit în timp sub comanda o1. Se spune că această stare este "stabilă". Toate stările care sub o anumită comandă constantă păstrează starea anterioară sînt numite stări stabile, iar celelalte, stări instabile. In exemplul dat săgeţile indică succesiunea stărilor.

Să luăm ca exemplu de analiză şi sinteză schema de pornire şi oprire a unui motor electric, reprezentată în fig.VIII-4.-

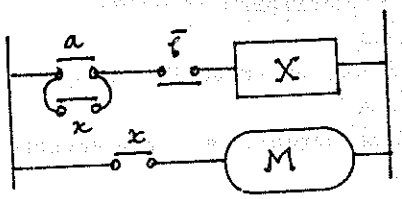


Fig. VIII-4.

Butonul a este normal deschis, iar $\bar{b}$ este normal închis. Contactul x este acţionat de releu; cînd a este acţionat releul închide contactul x şi porneşte motorul. In acelaşi timp contactul în paralel cu a se închide,deci motorul rămîne în stare de funcţiune şi cînd a nu mai este acţionat. Pentru oprire se acţionează $\bar{b}$ şi releul întrerupe curentul prin motor. Analiza detaliată este dată în tabela logică următoare:

	x	ab: 00	01	11	10
1	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	1

pentru analiza logică să presupunem următorul program:

abx
000
100
101
001

Acesta se interpretează în modul următor: 000, nu se acţionează nici un buton, motorul stă;

100, se acţionează butonul de pornire cînd motorul stă; urmează

101, butonul a este încă acţionat, dar motorul porneşte;

001, butonul a nu mai este acţionat,motorul merge

o/

Stările lol şi ool sînt stări stabile. Pentru oprirea motorului programul este:

ool
oll
olo
ooo

Să punem acum problema de sinteză, pornind dela tabel dat. Pentru forma normală disjunctivă, considerăm valorile 1 din interiorul tabelului şi le exprimăm în funcţie de capetele de linie şi coloană. Din poziţia 1,1 rezultă:

$$x = a\bar{b}x$$

Convenţia este ca x din membrul stîng să fie starea care urmează sub comanda şi pornind din starea din membrul drept. Din poziţia 1,4 rezultă $a\bar{b}\bar{x}$, iar din poziţia 2,4 rezultă $a\bar{b}x$. Aşadar în final:

$$x = \bar{a}\bar{b}x + a\bar{b}\bar{x} + a\bar{b}x = (a+x)\bar{b}$$

Simplificarea se poate face direct din tabel, deoarece 1,4 şi 2,4 sînt adiacente deci dau termenul $a\bar{b}$, iar poziţiile 2,1 şi 2,4 sînt adiacente şi dau termenul $\bar{b}x$, de unde $x=(a+x)\bar{b}$ rezultat direct simplificat din tabel.

VIII-4. Aplicaţii şi exemple.

Pentru schemele electronice, metodele de analiză şi sinteză expuse mai sus nu diferă. De exemplu, schema din fig-VIII-5 realizează funcţia logică:

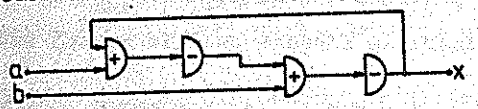


Fig.VIII-5.

$\overline{\overline{a + x} + b} = x$ de unde $x=(a+x)\bar{b}$, adică acelaşi sistem ca în cazul pornirii motorului, descris în paragraful precedent.

Pentru suma modulo 2, elementul logic necesar este de tipul "sau exclusiv", adică

x \ a	o	1
o	o	1
1	1	o

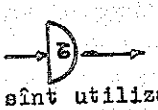
de unde $x= a\bar{x} + \bar{a}x = a \oplus x$

Acest tabel poate fi încă simplificat în forma:

a	x
o	x
1	$\bar{x}$

.//.

In unele scheme sînt necesare elemente de întîrziere; le vom reprezenta prin



Registrele sînt utilizate pentru păstrarea unui "ouvînt", pînă la sosirea unui alt ouvînt. Lungimea registrului este dată prin numărul de biţi al ouvîntului. Ca exemplu, să descriem un registru de deplasare, reprezentat în fig.VIII-6. Blocurile din schemă au funcţia

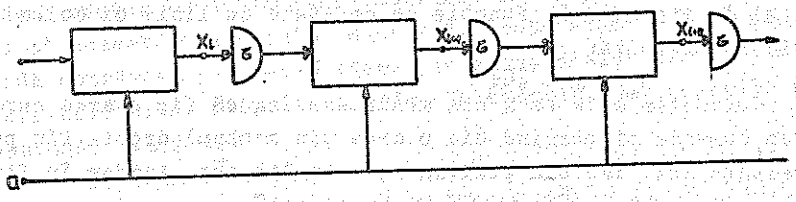


Fig. VIII-6.

logică: $x_{i+1} = ax_i + \bar{a}x_{i+1}$ .Pe borna a se aplică un semnal de ştergere (a=1) la fiecare tact. În acest moment la ieşirea fiecărui bloc apare bitul (0 sau 1) care era conţinut în acel bloc. Datorită întîrzierii, acest bit trece în blocul următor, astfel încît la fiecare tact cuvîntul se deplasează la dreapta cu o poziţie. Intr-adevăr, pentru a=1 avem $x_{i+1} = x_i$, iar pentru a=0 avem $x_{i+1} = x_{i+1}$.

Sumatorul binar, la fiecare poziţie a unui bit trebuie să efectueze operaţia

$$S = a+b+t \quad ; \quad t_s = a+b+t$$

unde a şi b sînt cei doi operanzi, t transferul dela poziţia inferioară, S suma modulo 2 rezultată, iar t(din membrul stîng) transferul la poziţia superioară. Efectuînd calculele în binar rezultă următoarea tabelă logică. Cu metoda de sinteză expusă anterior avem

a	b	t	t_s	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$S = \bar{a}\bar{b}t + \bar{a}b\bar{t} + a\bar{b}\bar{t} + abt$

$t_s = ab + bt + ta$

Schema este a unui sistem cu comandă directă cu trei intrări şi două ieşiri. Cele două expresii pot fi combibate astfel încît

$$S = (\bar{a}b+a\bar{b})\bar{t}_s + (\bar{a}\bar{b}+ab)t_s$$

De asemenea:

$S = (a+b+t)\bar{t}_s + (abt)t_s$, etc.

.//.

Acestor expresii le corespund schemele respective; alegerea se face în funcţie de specificaţii date la proiectare. Schema de principiu a unui multiplicator numeric este dată în fig. VIII-7. R_1 este

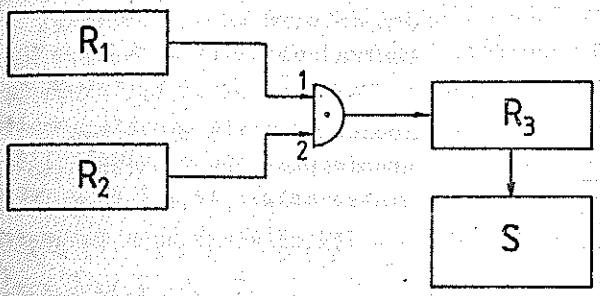


Fig.VIII-7.

un registru de deplasare în care este depus înmulţitorul.Registrul R_2 este un registru de deplasare în care este depus deînmulţitul.Produsul este realizat de elementul "şi", iar rezultatul este depus în registrul R_3. La fiecare ciclu rezultatul parţial din R_3 este adunat cu rezultatul precedent din sumator, astfel încît la terminarea ciclurilor necesare rezultatul final apare în sumatorul S. Fiecare ciclu constă din următoarele: pe borna 1 a elementului "şi" se menţine bitul înmulţitorului. Pe borna 2 apare prin deplasare deînmulţitul, astfel încît în R_3 apare un rezultat parţial. Pentru ciclul următor pe borna 1 apare alt bit al înmulţitorului, care se înmulţeşte cu deînmulţitul, ş.a.m.d.Pentru multiplicator, problema realizării unei scheme cu comandă directă nu are soluţie practică.

Intr-adevăr, numărul intrărilor şi ieşirilor creşte vertiginos în funcţie de lungimea operanzilor, iar schema devine impracticabilă. In schimb, pentru lungimi rezonabile ale operanzilor rezultatele produselor pot fi introduse într-un fişier, într-o memorie de mare capacitate şi cu o viteză mare de acces la memorie, astfel încît produsul să fie realizat într-un timp mai scurt decît printr-un multiplicator numeric.

Pentru numărarea în binar schema este secvenţială. Luăm ca exemplu un numărător cu patru poziţii, pe care îl descriem prin următoarea tabelă logică, a numărării binare.

.//.

4	3	2	1
x_4	x_3	x_2	x_1
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1
0	0	0	0

Aşadar pentru poziţia 1 avem:

$$x_1 = \bar{x}_1$$

ceeace descrie complect succesiunea din coloana 1.

Pentru coloanele 1 şi 2 avem:

$$x_2 = \bar{x}_2 x_1 + x_2 \bar{x}_1 = x_1 \oplus x_2$$

Această funcţie descrie complect. succesiunea din coloanele 1 şi 2.

Pentru coloanele 1,2 şi 3 rezultă:

$$x_3 = \bar{x}_3 x_1 x_2 + x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_2 x_1 + x_3 x_2 \bar{x}_1 =$$

$$x_3(\bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_1) + \bar{x}_3 x_1 x_2 =$$

$$x_3(\overline{x_1 x_2}) + \bar{x}_3 (x_1 x_2)$$

Deci $x_3 = x_3 \oplus (x_1 x_2)$

Procedînd în mod analog pentru toate cele patru poziţii se obţine:

$$x_4 = x_4 \oplus (x_1 x_2 x_3)$$

Rezultă că sînt necesare patru elemente de tip "sau exclusiv". Numărătorul astfel realizat prezintă însă neajunsul că propagarea semnalelor se face succesiv (se spune "în serie") astfel încît timpul de comutaţie este mare. De exemplu, la trecerea dela 1111 la 0000, comutarea se face pe rînd dela poziţiile 1 la 4. Pentru mărirea vitezei de numărare, una din soluţiile posibile este reprezentată în fig. VIII-8.-

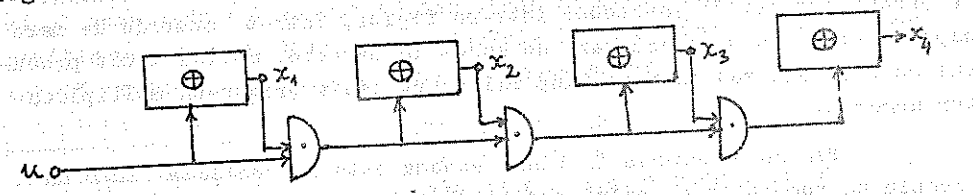


Fig. VIII-8.-

Să presupunem că toate poziţiile sînt în zero. La primul impuls la intrare se obţine $x_1 = 1$. La al doilea impuls intrarea lui x_2 este ux_1 deci comută direct în 1 cu semnalul dela intrare, ş.a.m.d. Aşadar, fiecare poziţie comută direct, comandate de semnalul de intrare, ceeace măreşte viteza de numărare.

.//.

Dacă dela fiçcare poziţie alegem ca ieşire $\bar{x}_i$, atunci numărătorul numără invers. Comutînd deci ieşirile dela x_i la $\bar{x}_i$ se obţine numărarea inversă, ceeace se poate realiza cu acelaşi numărător.

Numărătorul din fig. VIII-8 poate număra în orice bază de la 2 la 16. Intr-adevăr, utilizînd relaţii convenabile, putem realiza o decadă, necesară pentru numărarea în zecimal. De exemplu punînd $x_1 = \bar{x}_2$ şi $x_2 = \bar{x}_4$, comutaţia se face sărind peste 6 poziţii, astfel încît numără în baza zece. Numărătorul în baza zece nu poate fi realizat cu mai puţin de patru poziţii binare, deoarece reprezentarea binară a bazei sistemului zece necesită mai mult de trei biţi, aşa cum s-a arătat anterior.

Pentru afişarea rezultatului numărării sînt necesare decodificatoare care să primească semnalele dela numărător şi să reprezinte vizual cifrele zecimale. Aceste decodificatoare sînt scheme cu comandă directă, realizabile numai cu suma şi produsul logic. O soluţie simplă este utilizarea dipdelor pentru suma şi produsul logic, ca în exemplele din fig. VIII-9.

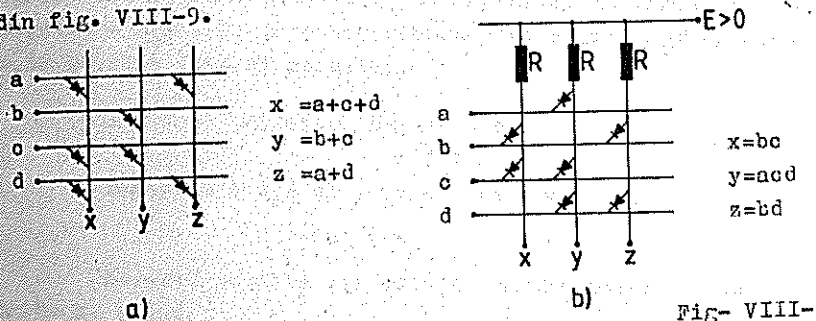


Fig- VIII-9

In schema a) la intrare se aplică potenţiale pozitive; la borna de ieşire nu apare un potenţial zero decît cînd toate bornele de intrare conectate pe bara respectivă sînt la potenţial zero, şi apare semnal la ieşire în toate celelalte cazuri. Prin urmare se realizează suma logică.

In schema b) asociem în acelaşi mod potenţialele logice, deci potenţial zero înseamnă zero logic, iar un potenţial E > o înseamnă 1 logic. Observăm că la toate bornele de ieşire apare 1 numai cînd toate diodele de pe bara respectivă sînt blocate prin aplicarea semnalului 1 pe bornele de intrare, iar pentru toate celelalte cazuri avem zero la ieşire. Aşadar se realizează produsul logic.

La bornele de intrare pot fi aplicate şi semnale cu negaţie, de ex. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, astfel încît schemele cu comandă directă pot fi realizate numai cu diode. Conectarea ieşirilor unei astfel de scheme

ca intrări ale unei scheme de acelaşi gen, pune probleme noi, deoarece diodele nu sînt diode ideale. Intercalarea unor aplificatpare pentru separarea interdependenţelor rezolvă problema. In prezent însă decodificatoarele se realizează ca circuite integrate, astfel încît pentru un numărător se realizează blocuri integrate care realizează o decadă cu afişarea respectivă.

In avionică în prezent, pentru realizarea echipamentului electronic de bord şi de sol, se utilizează dispozitive integrate de tipul VLSI (Very Large Scale Integrated) şi VHSI (Very High Speed Integrated).Se manifestă în continuare o creştere considerabilă a vitezei de lucru şi a fiabilităţii, însoţite de o scădere considerabilă a gabaritului, greutăţii, consumului de energie şi preţului.

IX. Calculul comenzilor pentru zbor programat.

IX.1 - Controlabilitate şi accesibilitate.

Repetăm aci ecuaţia şi soluţia pentru un sistem dinamic constant:

$$Dx = Ax + Bu + x_0\delta$$
$$x(t) = he^{At}x_0 + he^{At}B * u \qquad \text{IX-1-}$$

Reamintim că $x_0\delta$ reprezintă o sursă de perturbaţie instantanee; aşadar, pentru $t < o$ se execută programul de zbor deoarece avem $u(t < o) = o$ şi deci $x(t < o) = o$. La $t=o$ sursa de perturbaţie instantanee determină saltul de stare x_0, după care, pentru $t > o$, sistemul evoluează descris de $x(t)$. Punem acum următoarea problemă: dacă există $u(t)$ care să aducă sistemul în $x=o$, pentru orice x_0, atunci sistemul este controlabil. Se poate pune problema rejecţiei instantanee a perturbaţiei (adică aducerea instantanee a sistemului în zero), readucerea la program într-un timp finit $T > o$, sau revenirea asimptotică la program. Să tratăm mai întîi cazul rejecţiei instantanee a perturbaţiei instantanee $x_0\delta$. Ne propunem deci ca $x=o$ pentru $x_0 \neq o$. Atunci punem $t=o$ în soluţia IX-1 şi rezultă:

$$x_0 + (he^{At}B * u)_{t=o} = o$$

Pentru $u = u_0\delta$ şi u_0 = constant rezultă:

$$Bu_0 = -x_0$$

Această ecuaţie are soluţie pentru orice x_0 numai dacă rang $B = n$, adică

$$\dim u = \dim x$$

adică numai dacă acţiunea comenzilor se exercită direct asupra tuturor stărilor. Pentru aviaţie această constatare are valoare practică; se ştie, de exemplu, că pentru aterizarea în atmosferă turbulentă, este necesar un organ de predicţie asupra perturbaţiei atmosferice. In acest caz are sens elaborarea comenzii anterior producerii perturbaţiei. Idealizînd, problema rejecţiei instantanee a unei perturbaţii instantanee are sens fizic. Să punem acum problema ca sistemul să fie adus în zero la un timp $T > o$.

In acest caz va trebui ca $x(t > T) = o$, aşadar

$$(e^{At}x_0)_{t>T} + (e^{At}B * u)_{t>T} = o \qquad \text{sau}$$

$$(e^{At}B * u)_{t>T} = -(e^{At}x_0)_{t>T} \qquad \text{IX-2}$$

.//.

Deoarece e^{At} este nesingulară pentru orice t, membrul drept poate fi reprezentat printr-un vector $X_0 \in R^n$, oricare ar fi x_0. Aşadar dorim ca ecuaţia IX-2 să admită cel puţin o soluţie u, oricare ar fi x_0. Atunci $u \mapsto x_0$ trebuie să fie surjectivă. Prin urmare, dacă $u \mapsto x_0$ este surjectivă, atunci acest sistem este controlabil. Aşadar: condiţia necesară şi suficientă ca sistemul IX-1 să fie controlabil, este ca aplicaţia $u \mapsto x_0$ să fie surjectivă. Evident că în acest caz şi aplicaţia $u \mapsto x_0$ este surjectivă. Pentru a găsi un criteriu practic de controlabilitate, procedăm în modul următor: presupunem că $u \in U$ acoperă un subspaţiu de dimensiune mai mică decît R^n. Atunci înseamnă că există vectori ortogonali $x^\perp$ pe acest subspaţiu, care dau produsul scalar zero, adică există:

$$\langle x^\perp | * e^{At} B = 0 \quad , \text{ deoarece } u \text{ este ambiguu.}$$

Dezvoltînd în serie pe e^{At} se obţine:

$$\langle x^\perp | * (B\delta^{-1} + AB\delta^{-2} + A^2B\Gamma^{-3} + \cdots) = 0 \quad \text{sau}$$

$$\langle x^\perp | * B\delta^{-1} = 0$$

$$\langle x^\perp | * AB\delta^{-2} = 0$$

$$\langle x^\perp | * A^2B\delta^{-3} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Se observă imediat că dacă coloanele matricelor

$$B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots \cdots$$

sînt liniar independente, atunci nu există $x^\perp \neq 0$ care să satisfacă relaţiile de mai sus. Aceasta este condiţia necesară de controlabilitate. Suficienţa se obţine în modul următor: cu teorema Cayley-Hamilton se obţine că A^n este liniar dependentă de $I, A, A^2, \ldots A^{n-1}$. Prin urmare, dacă în matricea

$$\mathcal{C} = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B] \qquad \text{IX-3}$$

nu se găsesc n coloane liniar independente, atunci în mod sigur nu se găsesc în termenii de ordin superior. Aşadar, condiţia necesară şi suficientă ca sistemul IX-1 să fie controlabil, este ca

$$\text{rang } \mathcal{C} = n \qquad \text{IX-4}$$

Deoarece surjectivitatea $u \mapsto x_0$ se poate exprima şi în alte moduri, rezultă că pot fi realizate şi alte criterii de controlabilitate, echivalente. De exemplu, un criteriu "modal" de controlabilitate este următorul

$$\text{rang } [\lambda_i I - A \,\vdots\, B] = n \; ; \quad \lambda_i \in \sigma A = \{\lambda_i\} \qquad \text{IX-5}$$

pentru toate valorile proprii ale matricei A.

//.

Dacă un sistem are o parte necontrolabilă, pentru a pune în evidenţă aceasta aducem sistemul la forma canonică de controlabilitate. Există întotdeauna o matrice nesingulară T care aduce sistemul IX-1 la forma canonică de controlabilitate,

$$D\begin{bmatrix} x' \\ \hline x'' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x' \\ \hline x'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x_0' \\ \hline x_0'' \end{bmatrix}\delta$$

Conform partiţiei, partea controlabilă este descrisă de

$$Dx' = A_{11}x' + A_{12}x'' + B_1 u + x_0'\delta$$

iar partea necontrolabilă de

$$Dx'' = A_{22}x'' + x_0''\delta$$

Se observă că în partea controlabilă intervine şi efectul perturbaţiei instantanee x_0'' care apare în partea necontrolabilă, într-adevăr, avem:

$$x'' = he^{A_{22}t} \cdot x_0''$$

Prin urmare:

$$x' = he^{A_{11}t} x_0' + he^{A_{11}t} B_1 * u + hA_{12}e^{A_{22}t} x_0''$$

Se vede acum că dacă partea necontrolabilă este asimptotic stabilă, $Sp\, A_{22} \subset \mathbb{C}^-$, atunci sistemul poate fi readus la program prin comanda u, care acţionează numai asupra părţii controlabile, deoarece efectul lui x_0'' se stinge asimptotic.

Să luăm acum cîteva exemple : considerăm din nou dublul integrator:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Am văzut că acest sistem este instabil, deoarece $Sp\, A = \{0\}$. Formăm matricea de controlabilitate:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

care are rangul 2, deci acest sistem este controlabil şi instabil.

Să considerăm acum sistemul:

$$D\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \qquad \text{IX-6.}$$

.//.

Acest sistem este stabil, deoarece $Sp\,A = \{-1, -1\}$. Formăm matricea de controlabilitate

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rangul acestei matrice este unu, deci sistemul este stabil, dar nu este controlabil. Efectuăm transformarea:

$$x = Tz$$

unde $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ și $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Obținem sistemul în forma canonică de controlabilitate:

$$D\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}AT}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{T^{-1}B} u + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{01} \\ -x_{01}+x_{02} \end{bmatrix}}_{T^{-1}x_0} \delta$$

se observă că dacă $x_{01} = x_{02}$ atunci avem $z_2 = 0$; într-adevăr

$$z_2 = he^{-T}(-x_{01} + x_{02})$$

Pentru sistemul IX-6 avem:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \quad ; \quad e^{At}B = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

Iată deci că orice x de forma

$$x = |x_1, -x_1>$$

este ortogonal pe subspațiul acoperit de u, deoarece

$$<x_1, -x_1| * \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = 0$$

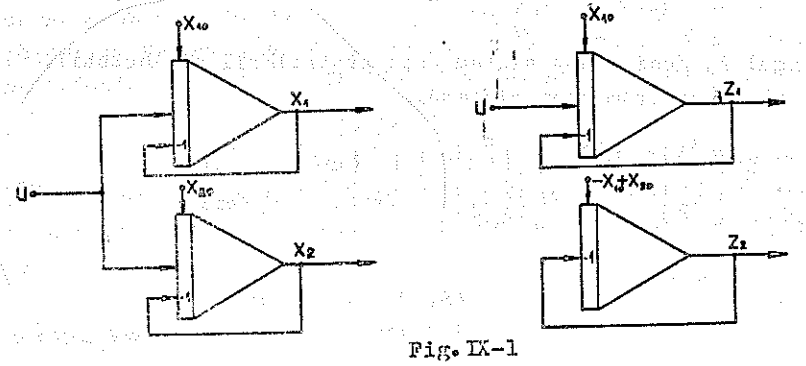


Fig. IX-1

In fig.IX-1 sînt reprezentate cele două sisteme (în x şi în z). In schema canonică nu apare efectul lui z_2 asupra lui z_1, deoarece stările sistemului dat (în x) sînt decuplate (matricea A este diagonală). Alegem acum ca exemplu dublul integrator descris de

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{IX-7}$$

Matricea de controlabilitate este:

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

deci acest sistem nu este controlabil. Pentru partea controlabilă avem:

$$Dx_1 = x_2 + u + x_{1o}\delta$$

iar pentru partea necontrolabilă:

$$Dx_2 = x_{2o}\delta$$

Aşadar $x_x = x_{2o}h$ şi deci $Dx_1 = x_{2o}h + u + x_{1o}\delta$

de unde $x_1 = h*u + x_{1o}h + x_{2o}ht$

S-ar părea că o comandă de forma

$$u = -x_{2o}h$$

stabilizează sistemul (dar nu asimptotic) deoarece

$$x_1 = -x_{2o}ht + x_{1o}h + x_{2o}ht = x_{1o}h$$

Din punct de vedere practic însă, aceasta nu este o soluţie, deoarece $x_{2o}t$ creşte nemărginit.

Punem acum problema accesibilităţii, în următoarele condiţii: sistemul IX-1 pleacă din zero ($x_o = 0$) şi dorim ca pe un interval (t_1, t_2), $t_2 > t > 0$, să realizeze o stare dată. Dacă există comanda care realizează această stare, atunci spunem că acea stare este accesibilă. Aşadar trebuie să găsim comanda care realizează:

$$\left[x(t)\right]_{(t_1,\, t_2)} = he^{At}B * u \qquad \text{IX-8}$$

Dacă ecuaţia IX-8 admite cel puţin o soluţie în u, oricare ar fi $\left[x(t)\right]_{(t_1,t_2)}$ atunci spunem că sistemul este accesibil. Această condiţie revine la surjectivitate, astfel încît accesibilitatea este echivalentă cu controlabilitatea. Intuitiv, problema se poate pune şi altfel : să presupunem că sistemul pleacă din $x(t_1)$ şi dorim să-l ducem în zero. Dacă este controlabil, atunci există comanda care realizează acest program. Atunci există şi comanda care îl duce din zero în $x(t_1)$, reversînd axa timpului, adică calculînd comanda cu matricea e^{-At}, ceeace conduce la acelaşi criteriu atît pentru controlabilitate, cît şi pentru accesibilitate. O observaţie importantă este următoarea: pentru siste-

.//.

mele variabile şi neliniare controlabilitatea şi accesibilitatea nu sînt proprietăţi echivalente (în general). Într-adevăr să presupunem sistemul (programat pe starea zero)

$$\dot{x} = \varphi(x,u,t) \quad ; \quad \varphi(0,0,t) = 0$$

Problema controlabilităţii revine tot la surjectivitatea $u \longmapsto x$ pentru t_0 şi $x(t_0)$ date, dar criteriile enunţate mai sus nu au sens. Problema accesibilităţii revine tot la surjectivitatea $u \longmapsto x$, dar în problema $x(t_0)=0$ şi $[x(t)]_{(t_1,t_2)}$ dat. Aşadar, cele două proprietăţi: controlabilitate şi accesibilitate sînt fundamentate pe aceeaş condiţie de surjectivitate, dar în general nu sînt echivalente.

IX-2. Observabilitate

Introducem noţiunea de observabilitate în următoarele condiţii comanda este zero ($u=0$) dar sistemul este supus unei perturbaţii instantanee la $t=0$ ($x_0 \neq 0$). Măsurătorile se efectuiază la ieşire, deci avem

$$y = Cx = hCe^{At}x_0 \qquad \text{IX-9}$$

unde y, A şi C sînt date, iar x_0 este necunoscut. Dacă se determină x_0, atunci starea poate fi determinată pentru orice $t>0$ deoarece

$$x(t) = he^{At}x_0$$

Dacă există x_0, ca soluţiie a ecuaţiei IX-9, dar nu este unic, atunci problema nu este rezolvată, deoarece nu rezultă $x(t)$ unic. Aşadar, în IX-9 trebuie să rezulte cel mult o soluţie în x_0, deci $x_0 \longmapsto y$ trebuie să fie injectivă. Prin urmare, sistemul IX-9 este observabil numai dacă aplicaţia $x_0 \longmapsto y$ este injectivă, oricare ar fi y măsurat. Pentru a formula un criteriu de observabilitate recurgem la faptul că nucleul unei aplicaţii injective este vid. Aşadar dacă există $x_0 \neq 0$ astfel încît:

$$0 = hCe^{At}x_0$$

atunci nu rezultă injectivitate, deci sistemul nu este observabil. Aceasta înseamnă că

$$(C\delta^{-1} + CA\delta^{-2} + CA^2\delta^{-3} + \dots)x_0 = 0$$

Se observă că dacă liniile matricei astfel formate

$$\Theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

sînt liniar independente, atunci nu există $x_0 \neq 0$ care să dea $y=0$. Prin urmare criteriul de observabilitate este:

$$\operatorname{rang} \Theta = n$$

Nu este nevoe de reţinut mai mult decît pînă la A^{n-1}, în virtutea teoremei Cayley- Hamilton, aşa cum s-a arătat în cazul controlabilităţii. Un criteriu modal de observabilitate este:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ \cdots\cdots \\ C \end{bmatrix} = n$$

pentru toate valorile proprii ale matricei A.

Si aici dispunem de o teoremă referitoare la reprezentarea canonică; există o matrice nesingulară T astfel încît punînd $x=Tz$ sistemul să fie adus la forma canonică de observabilitate:

$$D\begin{bmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{10} \\ \cdots \\ z_{20} \end{bmatrix}\delta$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Pentru partea observabilă rezultă:

$$y_1 = C_1 z_1 = hC_1 e^{A_{11} t} z_{10}$$

iar pentru partea neobservabilă rezultă zero la ieşire.

Exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea de observabilitate este $\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Deoarece rang $\Theta < 2$ sistemul nu este complet observabil. Cu criteriul modal se obţine, pentru $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

deci modul he^t nu este observabil. Pentru $\lambda_2 = 2$ rezultă:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

deci modul he^{2t} este observabil. Să arătăm acum că există $x_0 \neq 0$ care dă $y = 0$;

$$C\delta^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}\delta^{-1} = 0,$$

$$C\delta^{-2}x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}\delta^{-2} = 0$$

etc.

.

.

.///.

Pe forma canonică se observă că la ieşire nu apar decît modurile date de partea observabilă. In cazul cînd dorim să construim dinamica sistemului numai pe baza datelor măsurate la ieşire, atunci nu este construibilă decît partea observabilă. Pentru sistemele lineare şi constante, constructivitatea este echivalentă cu observabilitatea. Deoarece propoziţiile enunţate asupra aplicaţiilor admit întotdeauna propoziţii duale, putem utiliza conceptul de dualitate şi în cazul sistemelor liniare, constante. Considerăm sistemul

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

şi "dualul" său, în sensul următor:

$$\dot{\tilde{x}} = A'\tilde{x} + C'\tilde{u}$$
$$\tilde{y} = B'\tilde{x} \qquad \text{IX-10.}$$

unde A',B',C' sînt transpusele. Atunci observăm că:

1°- dacă perechea (A,B) este controlabilă, atunci perechea (B',A') este observabilă.

2°- dacă perechea (C,A) este observabilă, atunci perechea (A',C') este controlabilă.

Aceasta rezultă imediat din faptul că rangul unei matrice indică numărul de linii (sau coloane) liniar independente. Ca în general în algebră, utilizarea dualului permite transpunerea directă a unor teoreme şi rezultate, ceeace reprezintă o simplificare a propoziţiilor şi demonstraţiilor respective.

IX-3. Calculul comenzilor de tip Dirac.

Pentru zborul de croazieră sistemul în primă aproximaţie descrie bine dinamica AZ. Considerăm atunci:

$$Dx = Ax + Bu + x_0\delta \qquad \text{IX-11}$$

şi soluţia pentru perturbaţia instantanee $x_0\delta$

$$x(t) = he^{At}x_0 + he^{At}B * u \qquad \text{IX-12}$$

Punem acum următoarea problemă: să se determine comanda de forma

$$u = \sum_0^N u_k\delta_k \quad ; \quad u_k = \text{const.} \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \qquad \text{IX-13}$$

care readuce sistemul în zero la timpul t_N. Reamintim că notăm cu δ_k distribuţia lui Dirac cu suportul în punctul t_k. In principiu punctele t_k pot fi alese oricum, dar neapărat:

$$t_{k+1} > t_k \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,N$$

introducînd comanda IX-13 în IX-12 se obţine:

$$x(t) = he^{At}x_0 + he^{At}B * \sum_0^N u_k\delta_k$$

.//.

iegire nu apar decît
cînd dorim să construim
rate la ieşire, atunci
Pentru sistemele lineare
tă cu observabilitatea.
ilor admit întotdeauna
ualitate şi în cazul sis-
l.

IX-1o.

im că:
ibilă, atunci perechea

ibilă, atunci perechea

l că rangul unei matrice
independente. Ca în general
punerea directă a unor
plificare a propoziţiilor

Dirac.
ul în primă aproximaţie

IX-11

IX-12

ă se determine comanda de

$k \in N$ IX-13

eamintim că notăm cu δ_k
t_k. In principiu punctele

..,N

$u_k \delta_k$

Efectuînd produsul de convoluţie rezultă:

$$x(t) = he^{At}x_0 + \sum_1^N h(t-t_k)e^{A(t-t_k)}Bu_k$$

Dacă sistemul este adus în zero la t_N, atunci avem

$$x(t_N) = 0$$

şi ecuaţia devine:

$$\sum_1^N h(t_N - t_k)e^{A(t_N - t_k)}B u_k = - he^{At_N}x_0 \qquad \text{IX-13}$$

sau $$e^{At_N}\sum_1^N h(t_N-t_k)e^{-At_k}B u_k = -he^{At_N}x_0$$

Deoarece e^{At_N} este nesingulară pentru orice t şi orice A, atunci înmulţim la stînga cu e^{-At_N} şi se obţine:

$$\sum_1^N h(t_N-t_k)e^{-At_k}B u_k = -hx_0$$

pt $t = t_N$
$h = 1$.

Acesta este un sistem de ecuaţii liniare, cu necunoscuta u_k; se presupune deci că x_0 este măsurat. In intervalul $o - t_1$ se presupune că acest sistem a fost rezolvat, deci se aplică comenzile u_k începînd dela t_1 pînă la t_N. Se observă că sistemul poate fi adus la o formă usuală:

$$\left[e^{-At_1}B \vdots e^{-At_2}B \vdots \cdots \vdots e^{-At_N}B\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_N \end{bmatrix} = -x_0 \qquad \text{IX-14}$$

$h(t-t_k) = 1$.

decarece pe intervalele respective $h(t-t_k) = 1$. Acest sistem are n ecuaţii şi mN necunoscute scalare. Pentru comoditatea expunerii rescriem sistemul IX-14 în forma:

$$\tilde{A}\tilde{u} = -x_0 \qquad \text{IX-15}$$

O primă condiţie rezultă din necesitatea de a avea un număr de necunoscute cel puţin egal cu numărul de ecuaţii, deci:

$$mN \geq n \qquad \text{IX-16}$$

In această situaţie, dacă rang $\tilde{A} = n$, sistemul admite cel puţin o soluţie.

Condiţia

$$\text{rang } \tilde{A} = n. \qquad \text{IX-17}$$

revine la condiţia de controlabilitate. Intr-adevăr, dacă perechea (A,B) este controlabilă, atunci aplicaţia $u \mapsto x$ este surjectivă, deci

.//.

există cel puţin o soluţie pentru u.

Dacă diviziunea t_k o alegem cu pasul egal atunci

$$t_{k+1} - t_k = T > 0$$

şi sistemul de ecuaţii IX-14 devine:

$$\left[e^{-AT}B \vdots e^{-2AT}B \vdots \cdots \vdots e^{-NAT}B\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = -x_0 \qquad \text{IX-18}$$

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & u_2 & \cdots & u_m \\ u_1^2 & & & \\ \vdots & & & \\ u_1^n & & & u_m^n \end{bmatrix}$$

Una din metodele cele mai bune pentru calculul matricei exponenţiale recurge la alegerea lui T care minimizează eroarea cînd se calculează matricea e^{AT}. Pentru calcul numeric se recomandă deci această alegere a lui T. După ce s-a calculat e^{-AT}, matricea coeficienţilor se obţine prin înmulţire succesivă cu e^{-AT}. Dacă nu convine să recurgem la matricea e^{-AT}, atunci se poate calcula direct cu e^{AT} utilizînd sistemul în forma IX-13; aceasta ar evita inversarea matricei e^{AT}. Rescriem atunci IX-13 în forma:

$$\left[e^{(N-1)AT}B \vdots e^{(N-2)AT}B \vdots \cdots \vdots B\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = -e^{NAT}x_0 \qquad \text{IX-19}$$

Pentru calculul stărilor în punctele KT (limita la dreapta, după salt), recurgem la o formulă de recurenţă. Avem

$$x(0) = x_0$$

$$x(T) = e^{AT}x_0 + Bu_1$$

$$x(2T) = e^{2AT}x_0 + e^{AT}Bu_1 + Bu_2 = e^{AT}x_1 + Bu_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$x(KT) = e^{AT}x_{k-1} + Bu_k \qquad \text{IX-20}$$

Pentru ilustrarea metodei alegem mai întîi un exemplu simplu; recurgem din nou la dublul integrator:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deoarece polinomul caracteristic este $\lambda^2 = 0$ rezultă $A^2 = 0$ deci e^{At} se calculează imediat:

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi deci } e^{-At} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.//.

egal atunci

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & u_2 & \cdots & u_m \\ u_1^2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^n & & & u_m^w \end{bmatrix}$$

IX-18

lculul matricei expo-
ează eroarea cînd se cal-
recomandă deci această
ricea coeficienţilor se
u convine să recurgem
t cu e^{AT} utilizînd sis-
ea matricei e^{AT}. Rescriem

MAT
e x_o

IX-19

f (limita la dreapta,
Avem

$+ Bu_2 = e^{AT}x_1 + Bu_2$

IX-2o

întîi un exemplu simplu;

$\lambda^2 = o$ rezultă $A^2 = o$ deci

$$e^{-At} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ o & 1 \end{bmatrix}$$

Alegem pasul T=1 şi avem:

$$e^{-A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ o & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad e^{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ o & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m=1 \\ n=2 \end{matrix}$$

Din condiţia $mN > n$ rezultă că sînt necesari minimum 2 paşi. Pentru acest caz avem:

$$e^{-A}B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad e^{-2A}B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ aşadar sistemul de ecuaţii devine :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{1o} \\ -x_{2o} \end{bmatrix}$$

cu soluţia

$$u_1 = -(x_{1o} + 2x_{2o})$$
$$u_2 = x_{1o} + x_{2o}$$

Verificăm faptul că sistemul este dus în zero, cu formula IX-2o.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ o & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o \\ 1 \end{bmatrix} (x_{1o}+2x_{2o}) = \begin{bmatrix} x_{1o} + x_{2o} \\ -(x_{1o}+x_{2o}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ o & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1o}+x_{2o} \\ -(x_{1o}+x_{2o}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o \\ 1 \end{bmatrix} (x_{1o}+x_{2o}) = \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}$$

Deci sistemul este adus în zero oricare ar fi x_o, în doi paşi.

Faptul că se poate alege o comandă în mai mulţi paşi decît strictul necesar poate fi folosit pentru a alege o soluţie dintr-o infinitate de soluţii, impunînd o performanţă sau o restricţie. Într-adevăr dacă sistemul de ecuaţii:

$$\tilde{A}\,\tilde{u} = -x_o$$

are $mN > n$, atunci admite o infinitate de soluţii. Se poate, de exemplu, pune condiţia ca $\sum u_k^2$ să fie minim şi să se rezolve cu metoda celor mai mici pătrate. Echivalent, se calculează pseudoinversa lui A (matricea A este dreptunghiulară) şi atunci:

$$\tilde{u} = -\tilde{A}^{+} x_o$$

.//.

Oricare ar fi x_0 rezultă soluţia normală, ceeace este echivalent cu minimizarea în sensul celor mai mici pătrate. Să revenim asupra exemplului cu dublul integrator, cu comandă în trei paşi, dar astfel încît

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \text{minim}$$

Sistemul de ecuaţii pentru trei paşi este:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{10} \\ -x_{20} \end{bmatrix}$$

Utilizăm multiplicatorii lui Lagrange şi avem:

$$L = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \lambda_1(u_1+2u_2+3u_3-x_{10}) + \lambda_2(u_1+u_2+u_3+x_{20})$$

Obţinem ecuaţiile:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_1} = 2u_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u_2} = 2u_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u_3} = 2u_3 + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Eliminînd pe λ_1 şi λ_2 din primele trei ecuaţii se obţine:

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + 3u_3 &= x_{10} \\ u_1 + u_2 + u_3 &= -x_{20} \\ u_1 - 2u_2 + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

cu soluţia:

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}x_{10} - \tfrac{4}{3}x_{20} \quad ; \quad u_2 = -\tfrac{1}{3}x_{10} \quad ; \quad u_3 = \tfrac{1}{2}x_{10} + \tfrac{5}{3}x_{20}$$

Să verificăm că această comandă duce sistemul în zero. Avem succesiv

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(-\tfrac{1}{2}x_{10} - \tfrac{4}{3}x_{20}\right) = \begin{bmatrix} x_{10}+x_{20} \\ -\frac{1}{2}x_{10} - \frac{1}{3}x_{20} \end{bmatrix}$$

$$x(2T) = x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10}+x_{20} \\ -\frac{1}{2}x_{10} - \frac{1}{3}x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(-\tfrac{1}{3}x_{20}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_{10} + \frac{2}{3}x_{20} \\ -\frac{1}{2}x_{10} - \frac{2}{3}x_{20} \end{bmatrix}$$

$$x(3T) \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_{10} + \frac{2}{3}x_{20} \\ -\frac{1}{2}x_{10} - \frac{2}{3}x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\tfrac{1}{2}x_{10} + \tfrac{2}{3}x_{20}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deci în 3 paşi, cu Mb. dă-l adus în 0.

.//.

Această comandă este optimală în sensul că $\sum u_k^2$ este minim; se mai spune, impropriu, că aceasta este comanda "de energie minimă". Cu soluţia găsită putem scrie imediat pseudoinversa:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \qquad \text{IX-21}$$

Verificarea se obţine calculînd $\tilde{A}A\tilde{A} = \tilde{A}$. Într-adevăr:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Din formula IX-21 rezultă comanda de energie minimă, în trei paşi, pentru orice condiţie iniţială x_0. Evident, acelaşi procedeu poate fi aplicat şi pentru un număr mai mare de paşi, volumul de calcul creşcînd în mod corespunzător.

O problemă mai interesantă este determinarea comenzii supusă la restricţii, ceeace este o realitate în cazul AZ. De exemplu, suprafeţele de comandă nu admit bracări mai mari decît un unghi dat, maneta de gaze are limitări de cursă şi de viteză, ş.a.m.d. In cele ce urmează considerăm că au fost introduşi factori de scară pentru comenzi, astfel încît comanda admisibilă este dată de:

$$\| u \| \leq 1 \qquad \text{IX-22}$$

unde norma considerată este $\| u \| = \max_i | u_i |$ iar u_i sînt componentele scalare ale lui u. Ecuaţia IX-18 şi inegalitatea IX-22 formează o problemă de programare liniară. Fără a intra în amănunte, prezentăm totuşi cîteva rezultate ale programării liniare, utile în cele ce urmează: Condiţia IX-22 are ca reprezentare geometrică în R^m un poliedru regulat, denumit ortant. Acest poliedru închide un subspaţiu convex. Luînd ortantul ca domeniu de definiţie, putem construi imaginea prin IX.18 în R^n. Acest subspaţiu este domeniul de controlabilitate: dacă x_0 este un punct al domeniului de contralabilitate, atunci există u supus restricţiei IX-22 care duce sistemul în zero. Pentru reprezentarea domeniului de controlabilitate este necesar ca soluţia ecuaţiei IX-18 să fie unică. In acest scop reţinem din IX-18 primele n coloane liniar independente ; rescriem sistemul în forma

$$\bar{A} u_a = - x_{oc} \qquad \text{IX-23}$$

unde $u_a \in U_a$ este o comandă admisibilă conform IX-22 iar $x_{oc} \in X_o$ este o stare iniţială controlabilă prin u_a. Deoarece rang A=n, pentru orice

.//-

$x_{oc} \in X_c$ există cel mult şi cel puţin o soluţie. Aşadar $x_{oc} \longmapsto u_a$ este o aplicaţie bijectivă. Rezultă de aci că ortantul U_a are ca proiecţie X_c, punct cu punct. In consecinţă pentru orice $x_{oc} \in X_c$ există o soluţie unică u_a, iar pentru $x_{oc} \notin X_c$ IX-23 nu are soluţie $u_a \in U_a$. Fundamentat pe această concluzie, algoritmul de rezolvare pentru $x_{oc} \notin X_c$ este următorul:

1°. Se aleg primele n coloane independente din IX-18 şi se formează sistemul de ecuaţii IX-23. Se determină soluţia unică u_{a1}.

2°. Se aleg din u_{a1} acele valori care depăşesc restricţia IX-22 şi se reduc în modul la valoarea 1, păstrînd semnul.

3°. Comenzile mărginite la 1 se introduc în IX-18 ca variabile alese arbitrar, se trec în membrul drept şi se obţine din nou un sistem de tipul IX-18, dar cu alte condiţii iniţiale.

4°. Se repetă algoritmul pornind dela 1°. Dacă iniţial numărul de paşi N a fost ales prea mic, se măreşte numărul de paşi rescriind IX-18 în mod corespunzător.

5°. Se verifică rezultatul utilizînd formulele recurenţă IX-20.

Pentru ilustrare să considerăm dublul integrator şi restricţia IX-22:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{bmatrix}$$

$|u| \leq 1$

Formăm sistemul de ecuaţii IX-23 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{bmatrix}$$

In planul u_1, u_2 ortantul este un pătrat cu vîrfurile (1,1), (-1,1),(-1,-1),(1,-1),

Proiecţia acestui pătrat pe planul x_{o1}, x_{o2} este un paralelogram cu vîrfurile (date de ecuaţiile precedente): (3,-2), (1,o),(-3,2),(-1,o) reprezentat în fig.IX-2.Pentru orice punct conţinut în paralelogram (inclusiv frontiera) există comandă admisibilă în doi paşi, iar pentru orice punct din exteriorul paralelogramului comanda admisibilă necesită mai mult de doi paşi.

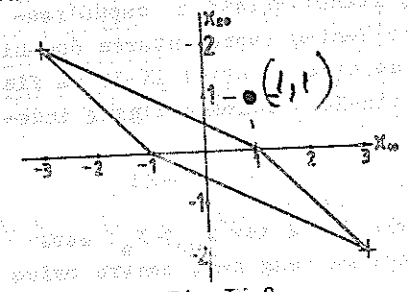


Fig.IX-2

Exemplu : $x_{1o}=1$, $x_{2o}=-\frac{2}{3}$. Punctul

.//.

. Aşadar $x_{oc} \longmapsto u_a$ este
tul U_a are ca proiecţie
$x_{oc} \in X_c$ există o solu-
soluţie $u_a \in U_a$. Funda-
zolvare pentru $x_{oc} \notin X_c$

lente din IX-18 şi se.
nă soluţia unică u_{a1}.
depăşesc restricţia IX-22
semnul.
luc în IX-18 ca variabile
e obţine din nou un sistem

1°. Dacă iniţial numărul
mărul de paşi rescriind

formulele recurenţă IX-2o,
integrator şi restricţia

$x_{1o} = u_1 + 2u_2$ (trind fiecare pot) $\Rightarrow$
$x_{2o} = -u_1 - u_2$

trat cu vîrfurile (1,1),

o1, x_{o2} este un paralelogram
(3,-2), (1,o),(-3,2),(-1,o)
tat în fig.IX-2.Pentru orice
nţinut în paralelogram (in-
rontiera) există comandă ad-
în doi paşi, iar pentru
nct din exteriorul paralelo-
comanda admisibilă nece-
mult de doi paşi.
: $x_{1o}=1$, $x_{2o} = -\frac{2}{3}$. Punctul

se găseşte în interiorul domeniului de controlabilitate. Aşadar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

şi comanda este: $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{1}{3}$. Să luăm acum un punct exterior, de exemplu 1. Aplicînd algoritmul descris mai sus obţinem:

$u_1 + 2u_2 = u_1 + 2u_2 = 1$
$-u_1 - u_2 = 1$

1°- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad u_1 = -3; \quad u_2 = 2$

2°- Luăm $u_1 = -1$ şi rezultă sistemul:

$$\begin{aligned} -1 + 2u_2 + 3u_3 &= 1 \\ +1 - u_2 - u_3 &= 1 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} 2u_2 + 3u_3 &= 2 \\ -u_2 - u_3 &= 0 \end{aligned}$$

3° cu soluţia: $u_3 = 2$, $u_2 = -2$. Alegem deci $u_1 = -1$, $u_2 = -1$ şi rezultă sistemul:

4°- $$\begin{aligned} -1 - 2 + 3u_3 + 4u_4 &= 1 \\ 1 + 1 - u_3 - u_4 &= 1 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} 3u_3 + 4u_4 &= 4 \\ -u_3 - u_4 &= -1 \end{aligned}$$

cu soluţia: $u_3 = 0$, $u_4 = 1$, Aşadar cu comanda

5°- $u_1 = -1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$ şi $u_4 = 1$

sistemul este adus în zero, în patru paşi. Verificarea cu formula de recurenţă IX-2o este imediată. In fig. IX-3 este reprezentat răspunsul sistemului la această comandă, pornind din condiţia iniţială $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

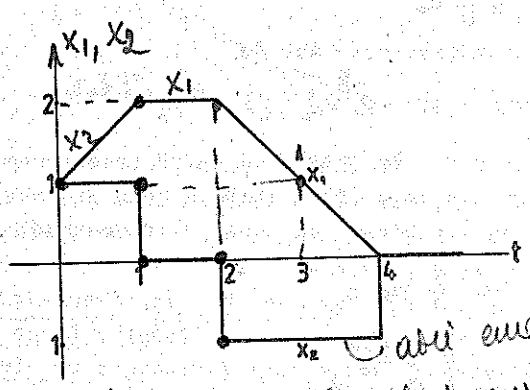


Fig. IX-3

abri cmd. $u_3 = 0$

Introducînd în formulele de recurenţă:

$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

Să luăm ca exemplu un avion în zbor de croaziera, cu următoarea dinamică longitudinală

$$D\begin{bmatrix} q \\ u \\ \alpha \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,6 & 0 & -9,36 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ u \\ \alpha \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_p \\ \delta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 \\ u_0 \\ \alpha_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

unde θ este unghiul de tangaj, q viteza unghiulară de tangaj, α unghiul de incidenţă,(radiani, respectiv rad/s), iar u este viteza (m/s) Comenzile sînt δ_p , unghiul de bracare a profundorului, δ_M unghiul de rotire al manetei de gaze (comanda motorului). Acest model este ipotetic, dar prezintă unele particularităţi importante.Se observă că motorul este decuplat de celelalte stări şi comenzi,astfel încît el este descris de:

$$Du = -0,1\,u + \delta_M + u_0\delta \qquad \text{IK-24}$$

soluţia este:

$$u = he^{-\frac{t}{10}} \cdot u_0 + he^{-\frac{t}{10}} * \delta_M$$

Motorul este stabilizat, astfel încît la perturbaţia instantanee u_0 şi fără comandă ($\delta_M = 0$) revine asimptotic la program. Dacă dorim însă ca stabilizarea să fie mai rapidă (în timp finit), atunci putem introduce o comandă supusă la restricţia

$$|\delta_M| \leq \delta_{M_0} > 0$$

Constanta de timp a motorului este $\tau = 10s$.In timpul $3\tau = 30s$ dinamica liberă ajunge la cca $0,05\,u_0$. Intr-adevăr:

$$e^{-3}u_0 \approx \frac{1}{20}u_0$$

Timpul de înjumătăţire este dat de

$$e^{-\frac{t}{\tau}}u_0 = \frac{1}{2}u_0 \quad ; \quad e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad t_{1/2} = \tau \ln 2$$

Pentru cazul de faţă $t_{1/2} \approx 0,69\tau = 6,9s$.Să presupunem acum că dorim să aducem motorul în zero (fără abatere dela program) în 6 secunde, cu o comandă de tip Dirac, cu pasul de o secundă, deci:

$$\delta_M = \sum_0^6 \delta_{MK}\,\delta_K$$

atunci răspunsul este:

$$u_6 = he^{-\frac{6}{10}}u_0 + \sum_1^6 e^{-\frac{6+t_k}{10}}\delta_{MK}$$

.//.

Punînd $u(6)=0$ rezultă:

$$e^{-\frac{6}{10}}u_0 + \sum_1^6 e^{-\frac{6-k}{10}}\delta_{Mk} = 0$$

sau

$$\sum_1^6 e^{-\frac{k}{10}}\delta_{Mk} = -u_0$$

sau

$$\left[e^{-\frac{1}{10}} \vdots e^{-\frac{2}{10}} \vdots e^{-\frac{3}{10}} \vdots e^{-\frac{4}{10}} \vdots e^{-\frac{5}{10}} \vdots e^{-\frac{6}{10}}\right] \begin{bmatrix} \delta_{M1} \\ \delta_{M2} \\ \delta_{M3} \\ \delta_{M4} \\ \delta_{M5} \\ \delta_{M6} \end{bmatrix} = -u_0$$

Această ecuaţie are o infinitate de soluţii; se poate căuta comanda de energie minimă, în care caz:

$$\sum \delta_{Mk}^2 = \min$$

şi se obţine soluţia unică. Se poate încerca cu comanda supusă la restricţii $|\delta_{Mk}| \leq \delta_{M_s}$, în care caz soluţia există numai pentru u_0 conţinut în domeniul de controlabilitate pentru şase paşi, etc. Alura răspunsului la comanda de tip Dirac ar fi cea din fig. IX-4.

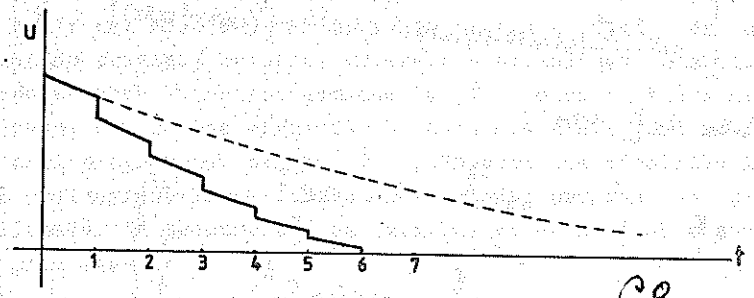


Fig. IX-4

Răspunsul sistemului la comanda zero este reprezentat punctat. Din punct de vedere practic se poate obiecta asupra realizabilităţii comenzilor de tip Dirac, mai ales în cazul unui motor de avion. Intr-adevăr, comanda de tip Dirac nu este aplicabilă practic decît în cazul comenzilor de tip impulsuri. Deşi astfel de comenzi există, ele nu reprezintă însă o soluţie răspîndită. Din aceste motive vom relua exemplul de mai sus determinînd comenzi de forma treptei Heaviside, ceeace ne apropie mult de realizările practice, mai ales atunci cînd comanda este obţinută dela calculatorul numeric.

.//.

Sistemul decuplat de motor este:

$$A=\begin{bmatrix} -1,6 & -9,36 & 0 \\ 1 & -0,4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculăm matricea de controlabilitate:

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix} -10 & 16 & -16,24 \\ 0 & -10 & -6 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

şi avem rang $\mathcal{C}=3$, deci perechea (A,B) este controlabilă. Calculăm e^{At}; avem succesiv:

$$sI-A=\begin{bmatrix} s+1,6 & 9,36 & 0 \\ -1 & s+0,4 & 0 \\ -1 & 0 & s \end{bmatrix} \qquad (sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{s+0,4}{s^2+2s+10} & -\frac{9,36}{s^3+2s+10} & 0 \\ \frac{1}{s^2+2s+10} & -\frac{s+1,6}{s^3+2s+10} & 0 \\ \frac{s+0,4}{s(s^2+2s+10)} & -\frac{9,36}{s(s^2+2s+10)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t}(\cos 3t-0,2\sin 3t) & -3,12e^{-t}\sin 3t & 0 \\ \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t & e^{-t}(\cos 3t+0,2\sin 3t) & 0 \\ 0,04-\frac{e^{-t}}{45}(1,8\cos 3t-49,4\sin 3t) & 0,936\left[-1+e^{-t}(\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t)\right] & 1 \end{bmatrix}$$

Pentru $t=\frac{\pi}{6}$ avem:

$$e^{A\frac{\pi}{6}}=\begin{bmatrix} -0,2e^{-\frac{\pi}{6}} & -3,12e^{-\frac{\pi}{6}} & 0 \\ \frac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{6}} & 0,2e^{-\frac{\pi}{6}} & 0 \\ 0,04+0,32e^{-\frac{\pi}{6}} & 0,936\left(1+\frac{e^{-\frac{\pi}{6}}}{3}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{-A\frac{\pi}{6}}=\begin{bmatrix} 0,2e^{\frac{\pi}{6}} & 3,12e^{\frac{\pi}{6}} & 0 \\ -\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{6}} & -0,2e^{\frac{\pi}{6}} & 0 \\ 0,04-0,32e^{\frac{\pi}{6}} & -0,936\left(1+\frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{3}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

.//.

Ca verificare, calculăm $e^{A\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-A\frac{\pi}{6}}$ şi, într-adevăr, se obţine matricea unitate. Formăm sistemul de ecuaţii IX-14; după efectuarea calculelor rezultă:

$$\begin{bmatrix} -2e^{\frac{\pi}{6}} & 10e^{\frac{\pi}{3}} & 2e^{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{10}{3}e^{\frac{\pi}{6}} & 0 & -\frac{10}{3}e^{\frac{\pi}{2}} \\ -0{,}4(1-8e^{\frac{\pi}{6}}) & -0{,}4(1+e^{\frac{\pi}{3}}) & -0{,}4(1+8e^{\frac{\pi}{2}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_0 \\ \alpha_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \qquad \text{IX-25}$$

Pentru orice condiţii iniţiale q_0, α_0, θ_0 soluţia acestui sistem de ecuaţii ne dă comanda de profundor care, în trei paşi, aduce sistemul în zero. Calculul matricei coeficienţilor, pentru sistemul de mai sus s-a făcut multiplicînd succesiv coloanele cu e^{-A}. Deoarece e^{-A} este explicitată, acelaşi rezultat se obţine calculînd direct:

$$e^{-At}B = \begin{bmatrix} -10e^{t}(\cos 3t + 0{,}2\sin 3t) \\ \frac{10}{3}e^{t}\sin 3t \\ -0{,}4 + \frac{10}{95}e^{t}(1{,}8\cos 3t + 14{,}4\sin 3t) \end{bmatrix}$$

Pentru $t = \frac{\pi}{6}$ rezultă prima coloană din IX-25, pentru $t = \frac{2\pi}{6}$ a doua, iar pentru $t = \frac{3\pi}{6}$ a treia, ceeace se verifică fără dificultate. Pentru un număr mai mare de paşi se poate continua oricît, dar un număr mare de paşi nu prezintă interes, deoarece sistemul este stabil. Cel mult s-ar putea avea în vedere comanda lui θ, care nu tinde asimptotic către zero, dar rămîne mărginit. Evident, se poate pune şi problema urmăririi unui program dat pentru θ, în care caz ecuaţiile IX-25 se rezolvă prelungindu-le pe toată durata acelui program, dat prin condiţii polilocale. Să presupunem, de exemplu, că se cere ca sistemul să treacă prin stările

$$x(t_{N1}) \quad ; \quad x(t_{N2}) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad x(t_{Nf})$$

unde:

$$m(N_{i+1} - N_i) \geqslant n$$

Atunci, pentru fiecare interval N_i, N_{i+1} există comanda care duce sistemul din $x(t_{Ni})$ în $x(t_{Ni+1})$ şi avem:

$$x(t_{N_{i+1}}) = e^{At_{N_{i+1}}} \cdot x(t_{N_i}) + \sum_{K=N_i}^{K=N_{i+1}} e^{A(t_{N_{i+1}} - t_K)} B u_K$$

şi se obţine un sistem de forma IX-18 sau IX-19, în membrul drept
scăzînd diferenţa:

$$x(t_{N_{i+1}}) - e^{At_{N_{i+1}}} x(t_{N_i})$$

Rezultă deci că problema polilocală se rezolvă pas cu pas, pe fiecare interval N_i, N_{i+1} fiind valabile toate metodele expuse anterior. Pentru cazul comenzii supuse la restricţii problema are soluţie numai dacă numărul de paşi din intervalul N_i, N_{i+1} este suficient, adică dacă diferenţa $x(t_{N_{i+1}}) - e^{At_{N_{i+1}}} x(t_{N_i})$ este situată în domeniul de controlabilitate. Să luăm ca exemplul dublul integrator, plecînd dela ecuaţia:

$$\begin{bmatrix} e^{-At_1}B & \vdots & e^{-At_2}B & \vdots & \cdots & \vdots & e^{-At_N}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix} = e^{-At_N} x(t_N) - x_o \qquad \text{IX-26.}$$

şi să considerăm problema bilocală în 5 paşi:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1N} - 5x_{2N} - x_{1o} \\ x_{2N} - x_{2o} \end{bmatrix}$$

Evident, orice problemă polilocală constituie o secvenţă de astfel de probleme bilocale. Prin urmare, condiţia ca problema polilocală să aibă soluţie, este ca fiecare problemă bilocală din secvenţa respectivă să aibe soluţie. Pentru exemplul dat să luăm condiţia iniţială $x_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ şi condiţia finală $x_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, cu restricţia comenzii $|u| \leq 1$
După efectuarea calculelor rezultă:

$$u_1 = -1 \; ; \; u_2 = -1 \; ; \; u_3 = -\frac{1}{2} \; ; \; u_4 = 1 \; ; \; u_5 = \frac{1}{2}$$

Răspunsul sistemului la această comandă este reprezentat în fig.IX-5.

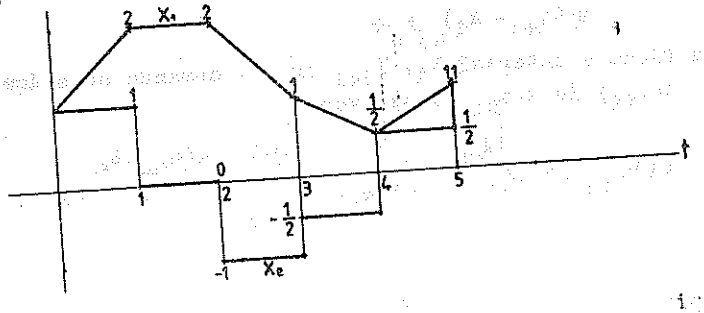


fig.IX-5

Pînă acum am calculat comanda pentru aducerea în zero după apariţia unei perturbaţii instantanee la t=o. Să studiem şi cazul cînd perturbaţia este "persistentă", adică atunci cînd poate apare la orice t. Pentru început, presupunem că perturbaţia $\bar{z}(t)$ este măsurată şi că a fost adusă la forma eşantionată:

$$\bar{z}(t) = \sum_{t_i}^{t_f} z_k \delta_k$$

In acest caz starea sistemului este descrisă de

$$x(t) = he^{At} x_0 + he^{At} B * u + he^{At} * \sum_{t_i}^{t_f} z_k \delta_k \qquad \text{IX-27.}$$

Luînd acelaş divizium $t_i \in N$, cu comanda $u = \sum_1^N u_k \delta_k$ rezultă:

$$x(t) = he^{At} x_0 + \sum_1^N h(t-t_k) e^{A(t-t_k)} B u_k + \sum_1^N h(t-t_k) e^{A(t-t_k)} z_k$$

Dorim ca la t =N sistemul să fie adus în zero, cu comanda în punctele $k \in N$. Atunci:

$$x(N) = 0 = e^{AN} x_0 + \sum_1^N h(N-k) e^{A(N-k)} B u_k + \sum_1^N h(N-k) e^{A(N-k)} z$$

Inmulţind cu e^{-AN} şi ordonînd termenii se obţine:

$$\sum_1^N e^{-Ak} B u_k = -x_0 - \sum_1^N e^{-Ak} z_k \qquad \text{IX-28}$$

unde A,B, x_0 şi z_k sînt cunoscute, iar u_k sînt necunoscute. Comparînd această ecuaţie cu IX-14 observăm că se schimbă numai termenul liber; prin urmare, tot ceeace s-a spus în legătură cu rezolvarea acestui sistem de ecuaţii rămîne valabil şi în cazul perturbaţiilor persistente de tipul $z_k \delta_k$. Din IX-28 se observă că problema revine la cazul unei perturbaţii instantanee, care este dată de membrul drept al ecuaţiei.

Un caz important este calculul comenzii pentru un sistem care nu este complect controlabil; pentru forma canonică, partea controlabilă este descrisă de

$$Dx' = A_{11} x' + A_{12} x'' + B_1 u + x_0' \delta$$

Pentru partea necontrolabilă avem:

$$\text{Aşadar:} \begin{cases} Dx'' = A_{22} x'' + x_0'' \delta \\ x'' = he^{A_{22} t} x_0'' \end{cases}$$

$$D\begin{bmatrix} x' \\ \hline x'' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \cdot u + \begin{bmatrix} x_{0_1} \\ \hline x_{0_2} \end{bmatrix} \cdot \delta$$

Introducînd în ecuaţia părţii controlabile rezultă:

$$Dx' = A_{11}x' + A_{12}he^{A_{22}t} x_0'' + B_1 u + x_0'\delta$$

De aci rezultă:

$$x' = he^{A_{11}t}x_0' + he^{A_{11}t} * B_1 * u + he^{A_{11}t} * A_{12}he^{A_{22}t} x_0''$$

Pentru o comandă de forma $u = \sum_1^N u_k \delta_k$ rezultă:

$$x'(t) = he^{A_{11}t}x_0' + he^{A_{11}t} * A_{12}he^{A_{22}t}x_0'' + \sum_1^N h(t-k)e^{A_{11}(t-k)}B_1 u_k$$

Dacă dorim ca la momentul t= N partea controlabilă să fie adusă în zero, atunci:

$$\sum_1^N h(N-k)e^{A_{11}(N-k)}B_1 u_k = -e^{A_{11}N}x_0' - \left[he^{A_{11}t} * A_{12}he^{A_{22}t}x_0''\right]_{t=N}$$

Efectul părţii necontrolabile poate fi acum privit ca o perturbaţie persistentă. Dacă acest termen este mărginit şi calculat numeric, atunci problema revine la a rezolva un sistem de ecuaţii IX-14; toate metodele expuse cu privire la acest sistem de ecuaţii rămîn valabile, deoarece se schimbă numai termenul liber.

Să analizăm acum termenul dat de partea necontrolabilă; explicitînd produsul de convoluţie rezultă:

$$he^{A_{11}t} * A_{12}he^{A_{22}t}x_0'' = \int_R h(t-\tau)e^{A_{11}(t-\tau)}A_{12}h(\tau)e^{A_{22}\tau}x_0''\,d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{A_{11}(t-\tau)}A_{12}e^{A_{22}\tau}x_0''\,d\tau = e^{A_{11}t}\int_0^t e^{-A_{11}\tau}A_{12}e^{A_{22}\tau}x_0''\,d\tau$$

Aşadar sistemul de ecuaţii devine:

$$\left[e^{-A_{11}}B_1 \vdots e^{-2A_{11}}B_1 \vdots \cdots\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_N \end{bmatrix} = -x_0' - \left[\int_0^t e^{-A_{11}\tau}A_{12}e^{A_{22}\tau}x_0''\,d\tau\right]_{t=N}$$

Deoarece (A_{11}, B_1) este controlabilă, matricea coeficienţilor are rangul maxim, aşadar sistemul de ecuaţii are soluţie oricare ar fi membrul drept, pentru un număr de paşi, suficient de mare. Aceasta este valabil atîta timp cît membrul drept rămîne mărginit: practic, procedeul este aplicabil pentru cazul cînd membrul drept nu ia valori prea mari. Aceasta implică, pentru timpi mari, ca partea necontrolabilă să fie stabilă (condiţie suficientă). Un studiu mai atent cere o evaluare a efectului părţii necontrolabile, care depinde de matricele A_{11} şi A_{22}, mai ales cînd $\mathrm{Sp}\,A_{22} \subset \mathbb{C}^+$

.//.

Pentru ilustrare să luăm ca exemplu:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] ; \quad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Sistemul este dat în forma canonică de controlabilitate; într-adevăr:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad A_{22} = 0 ; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuaţiile sînt:

$$Dx_1 = x_2 + x_3 + x_{1o}\delta$$
$$Dx_2 = 0 + x_{2o}\delta$$
$$Dx_3 = x_{3o}\delta$$

Pentru partea controlabilă soluţia este deci:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ht \\ 0 \end{bmatrix} x_{3o} + h \sum_k \begin{bmatrix} t - t_k \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

De exemplu, pentru condiţiile iniţiale $x_{1o} = x_{2o} = x_{3o} = 1$ rezultă ecuaţiile IX-28:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se obţin comenzile $u_1 = -5$, $u_2 = 4$, care duc stările x_1 şi x_2 în zero. In continuare însă sistemul nu rămîne în zero, din cauza termenului $x_{3o}h$; pentru aducerea în zero la fiecare doi paşi rezultă comanda periodică $u_3 = -2$, $u_4 = 2$. Schema bloc şi reprezentarea răspunsului sînt date în fig.IX-6.

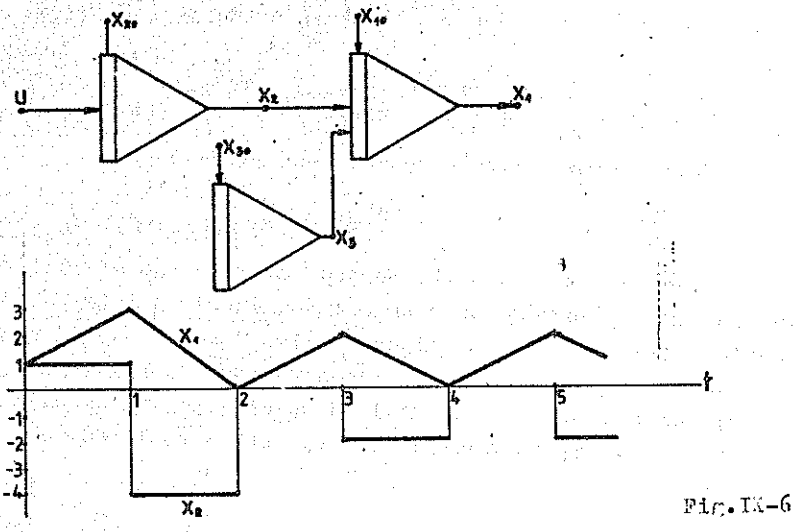


Fig.IX-6

IX-4. Calculul comenzii de tip Heaviside

Pentru aplicaţii practice, comanda prin impulsuri Dirac este mai rar utilizată. O mult mai largă aplicabilitate are comanda de forma unui semnal restabilit de un convertor DA conectat la ieşirea calculatorului numeric. Am văzut că la ieşirea convertorului forma semnalului este:

$$u = \sum_k u_k(h_k - h_{k+1}) \qquad \text{IX-29}$$

unde h_k este treapta Heaviside cu saltul în punctul k, iar u_k sînt vectori reali, constanţi pe intervalul (k , k+1). Să presupunem că la t=o apare o perturbaţie instantanee x_o şi că dorim să ducem sistemul în zero cu o comandă de forma IX-29. Atunci dinamica sistemului este descrisă de :

$$x(t) = he^{At}x_o + he^{At}B * \sum_k u_k(h_k - h_{k+1})$$

Inlocuind $h = \delta_k * h_k$ se obţine:

$$x(t) = he^{At}x_o + (h * he^{At}B) * \sum_k u_k(\delta_k - \delta_{k+1})$$

Am adus astfel problema la cea anterioară cu comenzi Dirac. Singura deosebire este termenul din paranteză, care este distribuţia generată de funcţia:

$$h * he^{At}B = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,d\tau = e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}B\,d\tau = e^{At}E(t)$$

unde E(t) este o notaţie introdusă pentru primitiva rezultată. Mai departe:

$$x(t) = he^{At}x_o + \sum_k \left[e^{A(t-t_k)}E(t-t_k) - e^{A(t-t_{k+1})}E(t-t_{k+1})\right]u_k$$

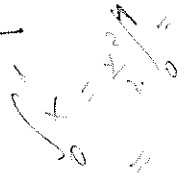
sau

$$e^{-At}x(t) = hx_o + \sum_k \left[e^{-At_k}E(t-t_x) - e^{-At_{k+1}}E(t-t_{k+1})\right]u_k$$

Normalizînd scara timpului ecuaţia devine:

$$e^{-At}x(t) = hx_o + \sum_k \left[e^{-Ak}E(t-k) - e^{-A(k+1)}E(t-t_{k+1})\right]\cdot u_k$$

Dacă dorim ca x(N)=o, aceasta are loc sub efectul comenzilor pînă la k=N-1, începînd dela k=1, astfel încît în intervalul o-1 are loc dinamica liberă a sistemului; acest timp este de altfel necesar pentru calculul primei comenzi. Mai departe comanda poate fi calculată pas cu pas; acest procedeu este util în special pentru cazul cînd comanda este supusă la restricţii. Pentru x(N)= o şi pentru k=1,2,... N-1 rezultă:



.//.

$$\tilde{A}\,\tilde{u} = -e^{-At_N}\,x(t_N) - x_0 .$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} e^{-AT}E(N-1) - e^{-2AT}E(N-2) & e^{-2AT}E(N-2) - e^{-3AT}E(N-3) & \cdots & e^{-(N-1)AT}E(1) - e^{-NAT}E(0) \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = -x_0$$

$K = 1, 2, \ldots N$

IX-30

Acest sistem de ecuaţii îl rescriem prescurtat în forma anterior utilizată:

$$\tilde{A}\,\tilde{u} = -x_0$$

Aşadar tot ceeace s-a spus în paragraful precedent rămîne valabil în întregime, deoarece se schimbă numai valorile numerice ale coeficienţilor.

Ecuaţia IX-3o poate fi rescrisă utilizînd o formulă de integrare numerică pentru calculul primitivei E(t), în care caz calculele preliminare pot fi reduse la calculul matricei e^{-A}, după care matricea A se construeşte prin înmulţiri şi scăderi. Dacă pasul de eşantionare este ales suficient de mic, se obţin rezultate bune chiar dacă utilizăm pentru integrare numerică formula trapezului.

Pentru ilustrare, să considerăm din nou exemplul cu dublul integrator.

Avem:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad e^{-At} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad e^{At}B = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$E(t) = \int_0^t e^{-A\tau} B\, d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} -\tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}$$

$$e^{-AK}E(t-k) = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-(t-k)^2}{2} \\ t-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-t^2-k^2}{2} \\ t-K \end{bmatrix}$$

$$e^{-Ak}\cdot E(N-k) = \begin{bmatrix} \frac{k^2-N^2}{2} \\ N-k \end{bmatrix}$$

Pentru N=5 sistemul de ecuaţii IX-3o devine:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{9}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{1o} \\ -x_{2o} \end{bmatrix}$$

.//.

Calculînd pseudoinversa se obţine comanda de "energie minimă" :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -6 & -23 \\ -2 & -11 \\ 2 & 1 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{bmatrix}$$

$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = u$

Comanda în patru paşi,astfel calculată, duce sistemul în zero,oricare ar fi x_{1o} şi x_{2o}. Răspunsul la această comandă este descris în tabelul care urmează. Pentru fiecare interval, t ia valoarea $0 \div 1$, ceeace simplifică scrierea.

t	u	x_2	x_1
$0 \div 1$	0	x_{2o}	$x_{2o}t + x_{1o}$
$1 \div 2$	$-\frac{6}{20}x_{1o} - \frac{23}{20}x_{2o}$	$-(\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{23}{20}x_{2o})t + x_{2o}$	$-(\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{23}{20}x_{2o})\frac{t^2}{2} + x_{2o}t + x_{1o} + x_{2o}$
$2 \div 3$	$-\frac{2}{20}x_{1o} - \frac{11}{20}x_{2o}$	$-(\frac{2}{20}x_{1o} + \frac{11}{20}x_{2o})t - (\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{23}{20}x_{2o})$	$-(\frac{2}{20}x_{1o} + \frac{11}{20}x_{2o})\frac{t^2}{2} - (\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{23}{20}x_{2o})t + \frac{23}{20}x_{1o} + \frac{53}{40}x_{2o}$
$3 \div 4$	$\frac{2}{20}x_{1o} + \frac{1}{20}x_{2o}$	$(\frac{2}{20}x_{1o} + \frac{1}{20}x_{2o})t - (\frac{8}{20}x_{1o} + \frac{14}{20}x_{2o})$	$(\frac{2}{20}x_{1o} + \frac{1}{20}x_{2o})\frac{t^2}{2} - (\frac{8}{20}x_{1o} + \frac{14}{20}x_{2o})t + \frac{1}{2}x_{1o} + x_{1o}$
$4 \div 5$	$\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{13}{20}x_{2o}$	$(\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{13}{20}x_{2o})t - (\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{43}{20}x_{2o})$	$(\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{13}{20}x_{2o})\frac{t^2}{2} - (\frac{6}{20}x_{1o} + \frac{43}{20}x_{2o})t + \frac{6}{40}x_{1o} + \frac{43}{40}x_{2o}$
$5 \div$	0	0	0

Pentru reprezentarea grafică a răspunsului luăm ca exemplu $x_{1o} = x_{2o} = 1$;graficul este dat în fig.IV-7.

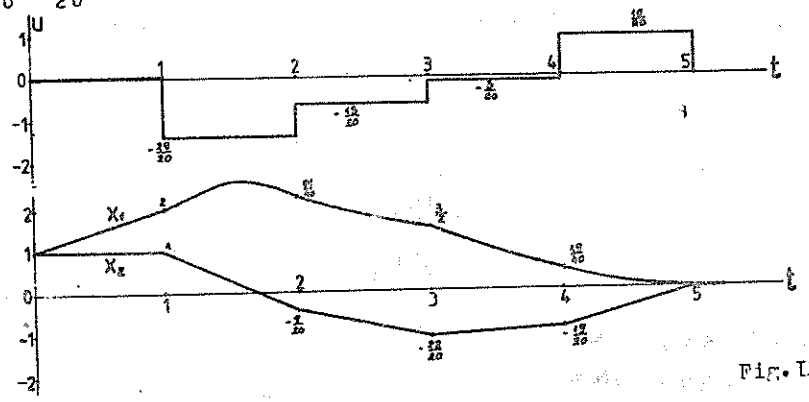


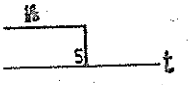
Fig. IV-7

anda de "energie

tă, duce sistemul în
tă comandă este des-
erval, t ia valoarea

x_1
$\ldots t + x_{10}$
$\ldots)\frac{t^2}{2} + \ldots t + x_{10} + x_{20}$
$\ldots)\frac{t^2}{2} - (\ldots)t$
$x_{10} + \frac{13}{10} x_{20}$
$\ldots)\frac{t^2}{2} - (\ldots)t$
$\frac{1}{2} x_{10} + x_{20}$
$\ldots)\frac{t^2}{2} - (\ldots)t$
$x_{10} + \frac{12}{10} x_{20}$
0

unsului luăm ca exemplu



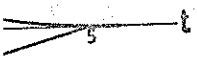


Fig. IX-7

Să căutăm acum soluția pentru $x_{10} = -\frac{7}{4}$; $x_{20} = \frac{3}{2}$ și comanda admisibilă $|u| \leq 1$; rezultă ecuația

$$3u_1 + 5u_2 + 7u_3 + 9u_4 = +\frac{7}{2}$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -\frac{3}{2}$$

Pentru primii doi pași avem:

$$3u_1 + 5u_2 = -\frac{7}{2}$$
$$u_1 + u_2 = -\frac{3}{2} \quad ; \quad u_1 = -2$$

Alegem $u_1 = -1$ și calculăm comanda pentru pașii 2 și 3.

$$-3 + 5u_2 + 7u_3 = -\frac{7}{2}$$
$$-1 + u_2 + u_3 = -\frac{3}{2} \quad ; \quad u_2 = -\frac{3}{2}$$

Alegem $u_2 = -1$ și calculăm comanda pentru pașii 3 și 4:

$$-3 - 5 + 7u_3 + 9u_4 = -\frac{7}{2}$$
$$-1 - 1 + u_3 + u_4 = -\frac{3}{2} \quad ; \quad u_3 = 0 \quad ; \quad u_4 = \frac{1}{2}$$

Reprezentarea grafică a răspunsului este dată în fig. IX-8.-

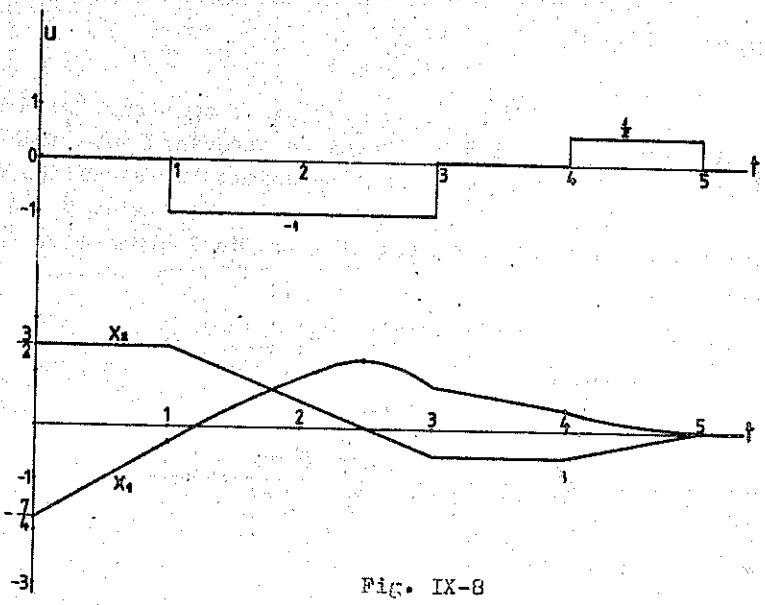


Fig. IX-8

.//.

Să considerăm acum un exemplu de avion al cărui model pentru zborul de croazieră este dat de

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,6 & -9,36 & 0 \\ 1 & -0,4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_p$$

unde θ este unghiul de tangaj, q viteza unghiulară de tangaj, iar α unghiul de incidență. În acest model ipotetic, motorul este considerat decuplat, astfel încît mișcarea longitudinală este bine descrisă de modelul de mai sus. Comanda este δ_p, unghiul de braoare al profundorului. Toate unghiurile sînt date în radiani. S-a ales, ca timp de eșantionare

$$\boxed{T = 0,4 \text{ s}}$$

iar ca timp de calcul (inițial)

$$\boxed{T = 0,4 \text{ s}}$$

Se cere comanda $|\delta_p| \leq 0,5$ care în patru pași readuce avionul la program, pornind dela perturbația instantanee inițială:

$$|1, 1, 1>$$

Rezultatul calculului este:

$\delta_{p1} = 0,5$; $\delta_{p2} = -0,298$; $\delta_{p3} = 0,33$; $\delta_{p4} = 0,11$

Cu aceste comenzi (de tip treaptă Heaviside) avionul revine la program în timpul :

$$t_f = 5 \times 0,4 = 2 \text{ s}$$

Simularea numerică a acestui caz a confirmat corectitudinea calculului, avionul revenind la zborul de croazieră după două secunde. Remarcăm faptul că acest sistem nu este asimptotic stabil (o valoare proprie este zero) astfel încît revenirea la program cu $\theta = 0$ necesită obligatoriu o comandă a profundorului - Graficul comenzilor este dat în fig. IX-9.

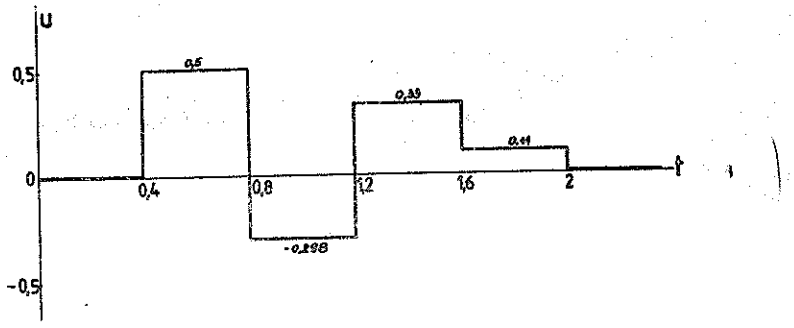


Fig. IX-9

*//.

CAP. X. Pilotul automat

X-1. Calculul regulatorului

Pentru a înțelege ideea centrală a reglajului, să analizăm modul cum un pilot uman comandă manual un avion. Pilotul urmărește aparatele de bord; cu informația obținută el construiește "starea" în care se află avionul. Dacă această stare este cea programată, atunci comenzile rămîn fixate conform programului. Dacă pilotul constată că a apărut o abatere dela program, atunci acționează comenzile necesare pentru readucere la program. Așadar, comanda se elaborează în funcție de starea în care se află avionul. Dacă mișcarea este descrisă de:

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad X-1$$

unde x este starea, iar u comanda, atunci comanda este o aplicație $x \mapsto u$; notăm:

$$u = g(x) \qquad X-2$$

Introducînd în X-1 rezultă :

$$\dot{x} = f(x, g(x)) \qquad X-3$$

Programul de zbor are loc în starea zero; o perturbație instantanee inițială x_0 scoate sistemul din program, după care are loc dinamica descrisă de X-3. Să presupunem de exemplu că se cere ca sistemul să revină asimptotic la zero. In acest caz g trebue determinat astfel încît X-3 să fie asimptotic stabilă. Evident, aci sînt aplicabile condițiile și metodele expuse în cap.II referitoare la stabilitatea în sensul lui Liapunov. In practică nu ne mulțumește stabilitatea asimptotică ci și dinamica regimului tranzitoriu. De exemplu se poate specifica un indice de performanță al reglajului, dat printr-o funcțională:

(1) $$\min J = \int_{ti}^{tf} L(x, u, t)dt \qquad X-4$$

Regulatorul care realizează un extremum al funcționalei se numește regulător optimal.

(2) O altă posibilitate este construirea regulatorului astfel încît sistemul reglat să urmărească cît mai fidel un model dat. Odată cu introducerea masivă a microprocesoarelor și a sistemelor de calcul pe mai multe nivele apar "blănci de regulatoare" "sisteme instruibile", "mașini inteligente", etc. Deja există în exploatare avioane care au un " sistem integrat de conducere a zborului" precum și programe de optimizare (consum minim de combustibil, timp minim, distanță minimă, etc.) la discreția echipajului. In toate aceste cazuri automatul este introdus cu scopul realizării unei "performanțe". Să tratăm mai întîi cazul liniar și constant; am văzut că există condiții ca X-1 să fie bine aproximat de :

.//.

$$Dx = Ax + Bu + x_0\delta \qquad X\text{-}5$$

A. Regulatorul liniar şi constant se construieşte din aplicaţia liniară $x \mapsto u$ dată de:

$$u = Kx \qquad X\text{-}6$$

unde K este o matrice reală, de dimensiune m linii şi n coloane. Aceasta este "legea de reglaj" aleasă. Introducînd X-6 în X-5 rezultă:

$$Dx = (A+BK)\,x + x_0\delta \qquad X\text{-}7.$$

care este aproximaţia liniară a lui X-3. Soluţia este imediată.

$$x = he^{(A+BK)t}x_0 \qquad X\text{-}8$$

Cu legea de reglaj X-6, dinamica sistemului este cea liberă, complect determinată de condiţiile iniţiale x_0 şi de matricea A + BK. Rămîne acum de văzut cum calculăm pe K astfel încît matricea A+BK să dea satisfacţie. Dacă punem numai condiţia de stabilitate, atunci K trebuie ales astfel încît A+BK să fie stabilă; evident, pot fi impuse şi alte condiţii de performanţă. Cea mai importantă teoremă referitoare la reglajul după legea X-6 este următoarea: dacă (şi numai dacă) perechea (A,B) este controlabilă, există K astfel încît matricea A+BK să aibă valori proprii date arbitrar. Aceasta este problema "alocării. polilor". Rezultă deci că poli sistemului reglat X-8 pot fi alocaţi arbitrar prin dimensionarea lui K, numai dacă perechea (A,B) este controlabilă. Să arătăm aceasta pe un caz mai simplu. Considerăm sistemul X-5 cu o singură intrare (u este un scalar) şi în forma companion; aceasta nu scade din generalitate. Avem:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic este $\chi_A = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$

Matricea K este: $K = < k_n, k_{n-1}, \ldots, k_1 >$

Matricea BK rezultă:

$$BK = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ k_n & \cdots & k_1 \end{bmatrix}$$

Aşadar obţinem:

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ k_n - a_n & k_{n-1} - a_{n-1} & k_{n-2} - a_{n-2} & \cdots & k_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

.//.

Această matrice are polinomul caracteristic

$$\chi_{A+BK} = \lambda^n + (a_1 - k_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n - k_n)$$

Acest polinom poate fi identificat cu orice polinom arbitrar dat, de acelaş grad. Aşadar, spectrul matricei A+BK poate fi dat arbitrar şi există K pentru care poli sînt alocaţi conform specificaţiei. Dacă transformăm sistemul X-5 în forma canonică de controlabilitate, atunci cele de mai sus sînt valabile pentru partea controlabilă. Denumim "stabilizabil" un sistem a cărui parte necontrolabilă este stabilă; evident, partea controlabilă permite o alocare arbitrară a polilor, deci este şi ea stabilizabilă.

Există multe metode de alocare a polilor, adică metode de calcul ale matricei K pentru (A+BK) dat. In cele ce urmează vom expune o metodă originală, care reduce problema la rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice, liniar şi omogen. Procedeul constă în următoarele: cu spectrul dat, formăm o matrice Jordan astfel încît:

$$A + BK = TJT^{-1} \quad ; \quad \det T \neq 0 \qquad X-9$$

De aci rezultă imediat

$$S_p(A+BK) = S_p J$$

Alegerea matricei J nu este arbitrară; de exemplu, dacă în J introducem blocuri Jordan pe care nu le poate realiza A+BK, atunci problema nu are soluţie. Concret, dacă A+BK nu este diagonalizabilă şi alegem J diagonală, atunci rezultă incompatibilitate. In consecinţă, J trebuie aleasă din mulţimea

$$J \in J(K)$$

unde J(K) sînt toate matricele Jordan realizabile prin K şi prin X-9. Practic, dacă J este aleasă greşit, ecuaţia X-9 nu are soluţie, deci J trebue modificată.

Un alt caz de incompatibilitate apare cînd (A,B) nu este controlabilă, iar prin J s-au introdus valori proprii modificate, în partea necontrolabilă. Dacă prin J se alocă valori proprii dorite, numai pentru partea controlabilă, iar pentru partea necontrolabilă se păstrează intacte blocurile Jordan, atunci X-9 are soluţie. In fine, cu X-9 se mai poate rezolva şi problema următoare: spectrul lui A se menţine nemodificat

$$S_p A = S_p J$$

Dacă sistemul are mai mult decît o bormă de intrare, atunci există $K \neq 0$ care nu modifică $S_p A$, dar care realizează o matrice $A+BK \neq A$. Uneori, aceasta este util, atunci cînd se impun anumite specificaţii pentru A+BK, dar dorim să nu modificăm alocarea polilor. Pentru ilustrarea acestor remarci introductive, să luăm ca exemplu:

.//.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea de controlabilitate este:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şi are rangul 2, deci sistemul dat nu este complect controlabil. Matricea K de reglaj are forma

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \end{bmatrix}$$

şi deci rezultă:

$$A+BK = \begin{bmatrix} K_{21} & 1+K_{22} & 1+K_{23} \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

X-lo

Oricare ar fi K această matrice are o valoare proprie zero (modul necontrolabil). Pentru partea controlabilă valorile proprii pot fi alocate arbitrar. Intr-adevăr, dacă punem $K_{11}=0$, atunci K_{21}, K_{12} şi zero sînt valorile proprii ale matricei A+BK. In plus, matricea A+BK este diagonalizabilă punînd:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & K_{12} & 0 \\ K_{21} & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Intr-adevăr, rezultă:

$$A+BK = \begin{bmatrix} K_{21} & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea X-lo cuprinde toate posibilităţile realizabile prin alegerea lui K- Orice matrice care nu este de tipul X-lo, nu este realizabilă prin K.

In ceeace priveşte rezolvarea ecuaţiei A-9, observăm că necunoscutele sînt K şi T, iar T se caută nesingulară. Un procedeu uşor de aplicat este următorul: rescriem ecuaţia în forma:

$$AT - TJ + BKT = 0$$

Notăm $\boxed{\bar{K} = KT}$; rescriem ecuaţia cu această notaţie :

.//.

$SpA = \{0; 0\}$ ① ②

$A^2 = 0$

$\mathcal{C} = [B; AB \mid \cancel{A^2B}]$

ct controlabil. Ma-

$(3\times3) + (3\times2)\cdot(2\times3)$

$\downarrow$

K.

X-1o

oare proprie zero (mo-
lorile proprii pot fi
atunci K_{21}, K_{12} şi
plus, matricea A+BK

ile realizabile prin
ipul X-1o,nu este re-

-9, observăm că necu-
ră. Un procedeu uşor
orma:

această notaţie :

$$AT - TJ + B\bar{K} = 0 \qquad \text{X-11}$$

2) Cînd se dă matr. de model ($y = M$)

In această ecuaţie A, J şi B sînt date, iar T şi $\bar{K}$ sînt necunoscute. După determinarea lui $\bar{K}$ rezultă regulatorul căutat:

$$\boxed{K = \bar{K}T^{-1}} \qquad \text{X-12}$$

După cum vom vedea -, incompatibilitatea discutată anterior rezultă din obţinerea unei matrice T singulară, astfel încît nu există K pentru acel caz de incompatibilitate.

Ecuaţia X-11 poate fi adusă la o formă mai convenabilă, făcînd uz de produsul tensorial (Kronecker). Acesta se defineşte astfel

$$A \times B = [a_{ij} B]$$

Cu alte cuvinte, fiecare element al matricei A este înlocuit cu produsul între scalarul respectiv a_{ij} şi matricea B. Aşdar dacă matricea A are n linii şi m coloane, matricea A x B este de n,m ori dimensiunea matricei B (produsul este exterior spaţiului de dimensiune n x m)

Exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{array}\right]$$

Evident, matricele pot fi dreptunghiulare- Pentru aplicarea produsului tensorial la scrierea ecuaţiei X-11 procedăm în modul următor: formăm un vector coloană θ luînd liniile matricei T şi în continuare liniile matricei $\bar{K}$ (*ordonate*). Rezultă:

$$\theta = | t_{11}, \dots, t_{1n}; t_{21}, \dots, t_{2n}; \dots; t_{n1} \dots t_{nn}; \bar{K}_{11}, \dots, \bar{K}_{1n}; \bar{K}_{21} \dots \bar{K}_{2n}; \dots; \bar{K}_{m1}, \dots, \bar{K}_{mn} >$$

Rezultă o matrice a coeficienţilor pe care o notăm cu $\mathcal{A}$; aceasta este dată de:

$$\boxed{\mathcal{A} = [A \times I - I \times J^T \vdots B \times I]} \qquad \text{X-13.}$$

Aşadar am obţinut sistemul liniar şi omogen:

$$\boxed{\mathcal{A}\theta = 0} \qquad \text{X-14}$$

.//.

Aici, cînd cînd nu mai e scalară, produsul se face în sens Kronecker:

$$[A \times I - I \times M^T \mid B \times I] \cdot \theta = 0 .$$

Matricea $\mathcal{A}$ poate fi scrisă mai în detaliu astfel:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11}I - J' & a_{12}I & \cdots & a_{1m}I & b_{11}I & \cdots & b_{1m}I \\ a_{21}I & a_{22}I - J' & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & a_{mm}I - J' & b_{m1}I & \cdots & b_{mm}I \\ a_{n1}I & \cdots & \cdots & & & & \end{bmatrix} \quad \text{X-15}$$

unde I este matricea unitate nxn, $A = [a_{ij}]$; $B = [b_{ij}]$ iar J' este transpusa lui J. Programul de calcul, pentru scrierea acestei matrice, este uşor de realizat, după care rezolvarea sistemului liniar şi omogen X-14 dispune de algoritme şi programe eficiente. Metoda aceasta recurge însă la inversarea matricei T, pentru calculul regulatorului după X-12; teoretic, există metode care inversează o matrice independent de indicele său de condiţionare, prin calcule cu fracţii raţionale, în care caz inversa apare fără eroare de calcul. Practic, s-au realizat programe de acest gen ; ele necesită însă un timp mare de calcul, ceeace face ca la dimensiuni mari metoda să devină impracticabilă.

Să arătăm acum cum se calculează soluţia generală a ecuaţiei omogene X-14. Matricea $\mathcal{A}$ are n^2 linii şi n^2+mn coloane. Aşadar

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} = \nu \leq n^2$$

Sistemul fundamental de soluţii conţine atunci $n(n+m)-\nu$ soluţii liniar independente. Sistemul fundamental de soluţii se obţine rezolvînd orice sistem de rang ν din X-14 care conţine ν necunoscute, celelalte rămînînd fixate. Orice soluţie a sistemului X-14 este o combinaţie liniară obţinută din sistemul fundamental de soluţii, care conţine vectori liniar independenţi. Din soluţia generală se caută un θ pentru care T este nesingulară (în caz de compatibilitate). Dacă în soluţia generală nu există T nesingulară, atunci s-a dat un J pentru care nu există soluţie. După determinarea lui θ, rezultă K din X-12. Pentru ilustrare reluăm exemplul anterior. Construim matricea $\mathcal{A}$ calculînd pe rînd AxI, I x J' şi BxI. Rezultă:

$$AxI = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

astfel:

$\ldots_{m}I \Big]$ X-15

$\ldots b_{nm}I \Big)$

$b_{ij}]$ iar J'
scrierea acestei
a sistemului liniar
ciente. Metoda
ru calculul regu-
nversează o matrice
alcule cu fracţii
calcul. Practic,
însă un timp mare
a să devină imprac-

generală a ecuaţiei
olcane. Aşadar

atunci $n(n+m)-\nu$
soluţii se găseşte
conţine ν necunoscute,
ului X-14 este o com-
de soluţii, care con-
erală se caută un θ
bilitate). Dacă în se-
dat un J pentru care
tă K din X-12. Pentru
ricea $\mathcal{A}$ calculînd pe

$$B \times I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Să presupunem acum că dorim să realizăm $S_p(A+BK) = \{-1, 0\}$. Valoarea proprie zero o păstrăm, întrucît acest mod este necontrolabil. Acest spectru este realizat de matricea Jordan

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi deci } J' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculăm produsul I x J' şi rezultă:

$$I \times J' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rezultă acum matricea $\mathcal{A}$ şi vectorul necunoscutelor θ:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$n^2 = 9 \Rightarrow n = 3.$
$n^2 + nm = 15$
$9 + 3m = 15 \Rightarrow m = 2$

$rg\, \mathcal{A} = 5 \Rightarrow \nu = 5.$

$$\theta = |t_{11}\ t_{12}\ t_{13}\ t_{21}\ t_{22}\ t_{23}\ t_{31}\ t_{32}\ t_{33}\ \bar{K}_{11}\ \bar{K}_{12}\ \bar{K}_{13}\ \bar{K}_{21}\ \bar{K}_{22}\ \bar{K}_{23}\rangle$$

./.

Sist. fundamental de soluţii:
$n(n+m) - \nu = 3 \cdot 5 - 5 = 10$

$3(3+2) - 5 =$ vect. liniar indep. $= 10.$

Matricea $\mathcal{A}$ are rangul 5; sistemul fundamental de soluţii se construeşte deci cu 10 necunoscute arbitrare. Patru necunoscute pot fi eliminate imediat deoarece:

$$\begin{cases} t_{13} \text{ arbitrar} \\ t_{31} = 0 \\ t_{32} = 0 \\ \bar{K}_{13} = 0 \end{cases}$$

După efectuarea calculelor rezultă sistemul fundamental de soluţii:

	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{31}	t_{32}	t_{33}	$\bar{K}_{11}$	$\bar{K}_{12}$	$\bar{K}_{13}$	$\bar{K}_{21}$	$\bar{K}_{22}$	$\bar{K}_{23}$
1	0	0	t_{13}	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	t_{13}	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	t_{13}	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	-1	-1	t_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	-1	t_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	t_{13}	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Orice soluţie particulară este o combinaţie liniară rezultată din sistemul fundamental de soluţii. De exemplu dacă adunăm linia 1 şi scădem liniile 3, 4 şi 6, se obţine:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \bar{K} = K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ & & \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şi rezultă:

$$A+BK = J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Orice soluţie particulară, cu T nesingulară, asigură alocarea cerută a polilor, deşi există o infinitate de matrice K pentru spectru specificat. Excepţie fac sistemele cu o singură bornă de intrare, cînd matricea B devine o coloană, iar K o linie. Pentru această K este unic, pentru un spectru dat. Această rezultă direct din demonstraţia dată la începutul paragrafului, unde K rezultă unic din identificarea a două polinoame.

In general spectrul cuprinde numere complexe, care apar în forma Jordan. Se poate evita calculul în complex, dacă J este înlocuită cu o matrice reală, care are acelaş spectru.

.//.

mental de soluţii se
ru necunoscute pot fi

temul fundamental de

11	$\bar{K}_{12}$	$\bar{K}_{13}$	$\bar{K}_{21}$	$\bar{K}_{22}$	$\bar{K}_{23}$
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0
	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	1

naţie liniară rezultată
dacă adunăm linia 1

$$K=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ulară, asigură alegerea
matrice K pentru spec-
gură bornă de intrare,
. Pentru aceasta K este
rect din demonstraţia
unic din identificarea a

mplexe, care apar în
ex , dacă J este înlo-
tru.

• In concluzie, pentru un sistem dat, în general rezultă o infinitate de matrice K, cu excepţia sistemelor cu intrare scalară. Alegerea unei anume K din această infinitate este o problemă care nu se rezolvă decît dacă se dau şi alte specificaţii la proiectarea regulatorului. După cum vom vedea, în cazul regulatoarelor optimale, care satisfac un indice de performanţă, în general rezultă K unic. Cu toate acestea, şi în acest caz poate fi pusă în discuţie alegerea criteriului de optim , ceeace iarăşi conduce la mai multe soluţii. Aşadar, proiectarea regulatorului necesită în general diverse condiţii şi specificaţii, cele mai multe depinzînd de scopul particular pentru care se proiectează regulatorul.

3) Să vedem acum ce şanse există pentru realizarea prin K a unei matrice A+BK= M_A, unde M este aleasă arbitrar. Avem

$$BK = M - A = M_A \qquad X\text{-}16$$

unde B şi M_A sînt date, iar K este necunoscută. Aceasta este un sistem de ecuaţii liniare, cu n^2 ecuaţii şi nm necunoscute. Dacă $n > m$ sistemul este supradeterminat, deci în general incompatibil. Cu toate acestea, în anumite condiţii, rezolvarea ecuaţiei X-16 poate fi utilă în proiectare. Să rescriem X-16 utilizînd produsul Kronecker. Notăm cu $|K>$ vectorul coloană al necunoscutelor, format din liniile ordonate ale lui K şi notăm cu $|M_A>$ vectorul coloană al termenului liber, de asemenea format cu liniile ordonate ale matricei M_A. Atunci X-16 devine:

$$[B \times I]\,|K> = |M_A> \qquad X\text{-}17$$

Condiţia de compatibilitate Kronecker - Capelli este

$$\text{rang}\,[B \times I] = \text{rang}\,[B \times I \,\vdots\, |M_A>]$$

In exemplul precedent această condiţie este verificată, deoarece A+BK = J. In general, chiar dacă există incompatibilitate, se poate găsi o pseudosoluţie pentru K, astfel încît să se minimizeze reziduul în X-17. Aceasta face ca atunci cînd se dă M arbitrar să rezulte K astfel încît A+BK să fie cea mai "apropiată" matrice de M. Dacă această soluţie pentru K corespunde condiţiilor de proiectare, atunci metoda este eficace. Pentru ilustrare, să reluăm exemplul precedent alegînd

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se observă că această matrice nu este realizabilă prin K, deoarece modul "0" nu este controlabil. Să vedem totuşi care este pseudosoluţia acestei probleme:

$$|K> = [B \times I]^{+}\,|M_A> \qquad X\text{-}18$$

//.

Prin urmare, calculînd pseudoinversa matricei $[B \times I]$ se obţine pseudosoluţia normală pentru K, oricare ar fi termenul liber $|M_A\rangle$. După efectuarea calculelor rezultă:

$$[Bx\ I]^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oricare ar fi $|M_A\rangle$ în X-18 se obţine pseudosoluţia normală (unică) pentru K. In exemplul dat rezultă imediat:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

şi prin urmare:

$$A_k = A + BK = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Această matrice este cea mai "apropiată" matrice de modelul M_A dat, în sensul că se minimizează reziduul în ecuaţia X-16. Sistemul reglat este reprezentat în fig X-1.

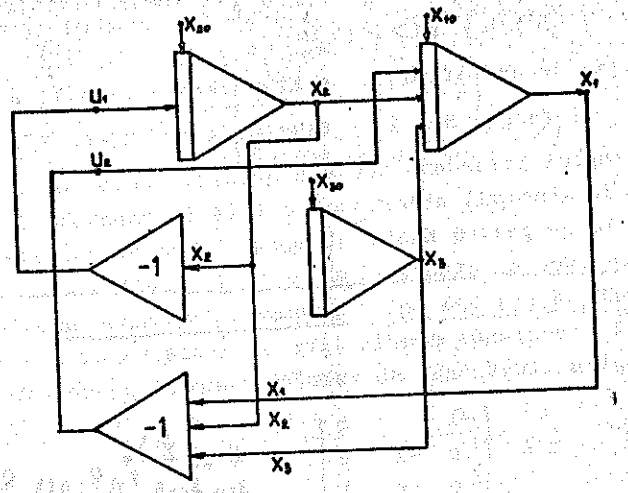


Fig. X-1

Din legea de reglaj rezultă: $u_1 = -x_2$ şi $u_2 = -x_1 - x_2 - x_3$. Ecuaţiile sistemului reglat au devenit:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \\ \dot{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$

.//.

X-2. Reglajul dela ieşire

In general, măsurarea directă a tuturor stărilor este dificilă; din acest motiv regulatorul nu poate fi conectat la bornele care ar reprezenta starea (fizic nici nu există aceste borne) ci numai la bornele prin care starea este "citită", adică la ieşire.

Fiind dat sistemul liniar şi constant:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad \text{X-19}$$

cea mai simplă lege de reglaj este cea liniară şi constantă

$$u = Hy = HCx \qquad H \in (m \times p)$$

unde H este o matrice reală, constantă, cu m linii şi p coloane. Înlocuind în prima ecuaţie din X-19 şi rezolvînd sistemul se obţine:

$$\begin{cases} x = he^{(A+BHC)t}x_0 \\ y = hCe^{(A+BHC)}x_0 \end{cases} \qquad \text{X-20}$$

Matricea de stare a sistemului reglat, care este descris numai de dinamica liberă, a devenit A+BHC. Dacă alegem un model M rezultă ecuaţia:

$$BHC = M - A = M_A \qquad \text{X-21}$$

Această ecuaţie reprezintă un sistem liniar cu n^2 ecuaţii şi cu mp necunoscute (elementele lui H). Dacă $n^2 > mp$ atunci sistemul este supradeterminat. Pentru o analiză mai detaliată procedăm ca în cazul anterior: formăm vectorul coloană al necunoscutelor

$$|H\rangle = |h_{11}, \ldots, h_{1p}; h_{21}, \ldots h_{2p}; \ldots; h_{m1}, \ldots h_{mp}\rangle$$

In acest caz matricea coeficienţilor devine B x C' (produsul Kronecker), deci obţinem sistemul de ecuaţii:

$$[B \times C^T] \cdot |H\rangle = |M_A\rangle \qquad \text{X-22}$$

Condiţia de compatibilitate Kronecker - Capelli este:

$$\text{rang}\,[B \times C'] = \text{rang}\,[B \times C' \,\vdots\, |M_A\rangle]$$

Dacă sistemul nu este compatibil calculăm pseudoinversa şi obţinem:

$$|H\rangle = [B^* \times C']^+ |M_A\rangle \qquad \text{X-23}$$

După cum am văzut, oricare ar fi M, pseudosoluția normală obținută din X-23 minimizează reziduul în X-21.

In ceeace privește alocarea arbitrară a polilor, de obicei problema nu are soluție prin H, chiar dacă sistemul este complect controlabil și complect observabil. In schimb se poate calcula H pentru alocarea unui spectru care este "cel mai aproape" de un spectru dat; pentru aceasta există algoritme și programe care permit studiul și proiectarea unui regulator.

Să reluăm exemplul precedent, dar cu o singură bornă de intrare și de ieșire:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix};\quad H=h$$

Calculăm matricea A +BHC

$$BHC=\begin{bmatrix}0&0&0\\h&h&h\\0&0&0\end{bmatrix};\quad A+BHC=\begin{bmatrix}0&1&1\\h&h&h\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Această matrice are polinomul caracteristic:

$$\varkappa=\lambda(\lambda^2-h\lambda-h)$$

Evident, regulatorul dela ieșire H nu asigură o alocare arbitrară a spectrului părții controlabile. In schimb, acest sistem este "stabilizabil", adică poate fi făcut stabil prin H; este suficient ca $h<0$ și sistemul a devenit stabil.

Cu același A, dar cu două borne de intrare, rezultă

$$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix};\quad H=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$$

$$A+BHC=\begin{bmatrix}h_2&1+h_2&1+h_2\\h_1&h_1&h_1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic al acestei matrice este:

$$\varkappa=\lambda\left[\lambda^2-(h_1+h_2)\lambda-h_1\right]$$

Așadar, la acest sistem, regulatorul H asigură o alocare arbitrară a spectrului părții controlabile. Uneori se spune că aceste regulatoare sînt "generice".

Să luăm cîteva exemple pentru ecuația X-23; ca mai sus, se dă:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix};\quad M=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

.//.

Se cere pseudosoluţia normală a ecuaţiei X-23. Rezultă deci sistemul:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pseudosoluţia normală este soluţie pentru ecuaţia adjunctă:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sau $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ deci $h_1 = -\frac{1}{3}$; $h_2 = -1$

Prin urmare rezultă:

$$A_H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A + BHC$$

Polinomul caracteristic este $\lambda\left(\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}\right)$

cu rădăcinile : $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} i$

* Modul necontrolabil a rămas zero, iar partea controlabilă este asimptotic stabilă.

Cu privire la alegerea matricei M facem următoarele observaţii =onsiderăm matricea rezultată A_k (sau A_H) unde $A_k = A + BK$ astfel:

$$A_k = M + E$$

unde E este o matrice care "perturbă" valorile proprii ale lui M. In mod firesc alegem matricea M diagonalizabilă (cu divizori elementari liniari). Cazul cînd M. nu este diagonalizabilă creează complicaţii, dar şi această problemă este studiată în literatura de specialitate. Aşadar notăm: $\lambda \in \sigma_p M$ şi $\mu \in \sigma_p A_k$. Prin urmare: $(M+E)y = \mu y$; $y \neq 0$

Această ecuaţie se rescrie:

$$(\mu I - M)y = Ey$$

Să presupunem că $\mu \neq \lambda$. Atunci putem obţine aceeaş ecuaţie în forma:

$$T^{-1}(\mu I - M)T(T^{-1}y) = T^{-1}ET(T^{-1}y) \quad ; \quad \Lambda = T^{-1}MT$$

sau notînd $w = T^{-1}y$ se deduce

$$(\mu I - \Lambda)w = (T^{-1}ET)w$$

unde Λ este diagonala lui M. Deoarece $\mu \notin S_p\Lambda$, rezultă că matricea $\mu I - \Lambda$ este nesingulară. Aşadar:

$$w = (\mu I - \Lambda)^{-1}(T^{-1}ET)w$$

Pentru orice pereche de norme consistente (norma matricială şi norma vectorială) avem:

$$\|w\| \leq \|(\mu I - \Lambda)^{-1}\| \cdot \|T^{-1}ET\| \cdot \|w\|$$

Deoarece $w \neq 0$ avem mai departe:

$$1 \leq \|(\mu I - \Lambda)^{-1}\| \, \|T^{-1}ET\| \qquad \text{sau}$$

$$\|(\mu I - \Lambda)^{-1}\|^{-1} \leq \|T^{-1}ET\|$$

Cu norma spectrală obţinem:

$$\|(\mu I - \Lambda)^{-1}\| = \max_i |\mu - \lambda_i|^{-1}$$

De aci rezultă:

$$\|(\mu I - \Lambda)^{-1}\|^{-1} = \min_i |\mu - \lambda_i|$$

De aci obţinem rezultatul final:

$$\min_i |\mu - \lambda_i| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\| \cdot \|E\| \qquad \underline{X}\text{-}24$$

Se poate verifica faptul că această relaţie este valabilă şi pentru normele $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ cît şi pentru norma euclidiană $\|\cdot\|_e$. Problema regulatorului rezolvată cu pseudosoluţia normală minimizează reziduul în sensul normei euclidiene. Aşadar X-24 este aplicabilă pentru acest caz. Pe de altă parte, relaţia X-24 se aplică şi în cazul cînd $\lambda_i = \mu$. In concluzie, orice valoare proprie a matricei A_k se află în cel puţin unul din cercurile cu centrul în λ_i şi de rază $\|T^{-1}\| \cdot \|T\| \cdot \|E\|$. Deoarece matricea de diagonalizare T nu este unică, definim "numărul de condiţionare spectrală" al lui M (pentru valorile proprii):

$$k_T(M) = \min_T \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$$

.//.

Deoarece:

$$\Lambda = \|TT^{-1}\| \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$$

rezultă că K_T nu poate fi mai mic ca unu. Aşadar, $K_T=1$ este cel mai bun indice de condiţionare spectrală . Dacă M. este hermitică, atunci T poate fi aleasă unitară, deci avem

$$\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$$

Aşadar pentru matricele hermitice avem $K_T = 1$ şi deci

$$\min_i |\mu - \lambda_i| \leq \|E\|$$

Dacă perturbaţia lui M este mică, atunci $\|E\|$,este mic,deci $\min_i |\mu-\lambda_i|$ este mic. Aşadar determinarea valorilor proprii ale unei matrice hermitice este o problemă perfect condiţionată. Alegerea unui model M,bine condiţionat este foarte utilă în problema reglajului, deoarece variaţiile mici ale elementelor lui M nu au efect asupra valorilor proprii. Această concluzie prezintă importanţă practică şi în legătură cu construirea matricei de stare A, care este perturbată şi de erori de construire a modelului. Aşadar alegerea unui model M,care să conducă la o matrice A_k bine condiţionată, prezintă însemnătate în proiectarea regulatorului. Această concluzie este extensibilă şi în cazurile în care reglajul este preluat dela ieşire, cu condiţia ca sistemul să fie cel puţin stabilizabil prin H.

Dacă M este aleasă matricea unitate, atunci T=I şi $\lambda_i=1$ deci: X-24 devine:

$$\min_i |\mu - 1| \leq \|E\| = \|A_k - I\|$$

Cu alte cuvinte, cu cît A_k este mai "aproape" de I (în sensul normei) cu atît valorile proprii ale matricei reglate A_k se apropie de valorile proprii ale modelului ales I.

O problemă de interes este şi calculul regulatorului K astfel încît A_k să rezulte ca "cea mai bine condiţionată spectral ", adică să rezulte K_T minim.

.//.

X-2-Compensatoare dinamice; estimatorul de stare. *numai*

In practică sîntem obligaţi să construim regulatorul dela ieşire, întrucît nu dispunem de alte informaţii asupra sistemului dat, decît cele de"citire a stărilor". Aşadar legea de reglaj trebue exprimată în funcţie de y. Notăm sistemul dat cu Σ_x şi avem:

$$\Sigma_x: \begin{cases} Dx = Ax + Bu + x_0\delta \\ y = Cx \end{cases} \qquad X\text{-}25$$

Ideea compensatorului dinamic este de a conecta la ieşirea lui Σ_x un alt sistem Σ_z, cu intrarea y, descris de:

$$\boxed{Dz = Fz + Gy + z_0\delta}$$

Alegem ca lege de reglaj:

$$\boxed{u = Kz + Hy = Kz + HCx}$$

Introducînd în X-25 se obţine sistemul extins:

$$* \quad D\begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A + BHC & BK \\ \hdashline GC & F \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ \cdots \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Dacă notăm $q = \dim \Sigma_z$ atunci matricea de stare a sistemului extins are n+q linii şi coloane. In această matrice A, B, C sînt date, iar F, G, H, K, sînt matrice care trebuiesc calculate. Evident, q poate fi ales arbitrar, dar cu cît q este mai mare, cu atît dispunem de mai mulţi parametri liberi. Tradiţional, acest regulator este denumit "PI", adică proporţional-integrator, deoarece conţine numai integratoare şi multiplicatoare cu o constantă. Construirea acestui regulator este echivalentă cu construirea unui regulator conectat la ieşire, deoarece:

$$\left[\begin{array}{c:c} A + BHC & BK \\ \hdashline GC & F \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} B & 0 \\ \hdashline 0 & I_q \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} H & K \\ \hdashline G & F \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} C & 0 \\ \hdashline 0 & I_q \end{array}\right]$$

adică este de forma

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{H}\bar{C}$$

unde matricea $\bar{H}$ trebue calculată, iar $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ sînt date.

Dacă notăm $n = \dim \Sigma_x$, atunci în practică regulatorul PI este util dacă $q < n$. Pentru $q = n$ este preferabilă construirea unui estimator de stare. Ideea estimatorului de stare este următoarea: fiind dat un sistem Σ_x de forma X-25, cu A, B, C cunoscute, se simulează acest sistem realizînd Σ_z de aceeaş formă

$$\boxed{Dz = Az + Bu + z_0\delta + L(Cz - y)} \qquad X\text{-}26$$

Intrarea celor două sisteme este aceeaş (u); ieşirile celor două sisteme sînt respectiv y şi z. Realizăm acum cuplarea celor două

.//.

sisteme astfel încît simulatorul Σ_z să urmărească sistemul dat Σ_x, prin dimensionarea adecuată a matricei L. Eroarea de urmărire este

$$\tilde{x} = x - z \quad ; \quad \tilde{x}_0 = x_0 - z_0$$

Scăzînd X-26 din X-25 rezultă:

$$D\tilde{x} = (A+LC)\tilde{x} + \tilde{x}_0\delta$$

Soluţia acestei ecuaţii este:

$$\tilde{x} = he^{(A+LC)t}\tilde{x}_0 \qquad \text{X-27}$$

Dacă L este dimensionat astfel încît A+LC să fie asimptotic stabilă, atunci se obţine un "estimator asimptotic de stare"; aceasta nu este posibil decît dacă perechea (A,C) este observabilă. Din X-27 se observă că atîta timp cît nu apare nici o perturbaţie, deci $\tilde{x}_0=0$, eroarea de estimare este nulă şi avem z=x. Deoarece z este ieşirea simulatorului, înseamnă că dispunem de informaţie completă asupra stării, deci se poate introduce legea de reglaj:

$$u = Kz \qquad \text{X-28}$$

In cazul în care apar perturbaţii ($\tilde{x}_0 \neq 0$), estimatorul urmăreşte asimptotic sistemul Σ_x, iar cu legea de reglaj X-28 se obţine răspunsul din ecuaţiile:

$$Dx = Ax + BKz + x_0\delta = (A+BK)x - BK\tilde{x} + x_0\delta$$

Scăzînd din X-25 se obţine:

$$\tilde{x} = (A+LC)\tilde{x} + x_0\delta$$

deci, după cum era de aşteptat, eroarea de estimare nu este afectată de reglaj. Dinamica sistemului Σ_x este atunci:

Aşa are loc reglajul

$$x = he^{(A+BK)t} * (x_0\delta - hBKe^{(A+LC)t}\tilde{x}_0) \qquad \text{X-29}$$

In lipsa perturbaţiei ($\tilde{x}_0=0$) avem

$$x = he^{(A+BK)t}x_0$$

adică Σ_x este reglat după stare ca şi cînd nu ar exista estimare. Dacă apare o perturbaţie $\tilde{x}_0 \neq 0$, atunci reglajul este influenţat de estimare prin cel de al doilea termen. Primul caz $\tilde{x}_0 = 0$ poate apare fie cînd $x_0 = z_0 = 0$, fie cînd $x_0 = z_0 \neq 0$. Aceste cazuri sînt neinteresante pentru reglaj, deoarece în lipsa perturbaţiilor regulatorul nu dă nici o comandă, iar perturbaţii identice asupra sistemului Σ_x şi simulatorului Σ_z au o probabilitate nulă de apariţie. Aşadar reglajul are loc după X-29. Dacă A+BK este asimptotic stabilă, şi dacă A+LC este şi ea asimptotic stabilă, atunci $x \to 0$ cînd $t \to \infty$, oricare ar fi $x_0 \neq 0$ şi $\tilde{x}_0 \neq 0$.

.//.

Ecuația X-29 poate fi adusă și în altă formă: de exemplu punem $z_0 = 0$ (simulatorul nu este perturbat).

$$x = he^{(A+BK)t}x_0 + he^{(A+BK)t} * hBKe^{(A+LC)t}x_0$$

Regulatorul cu estimator de stare înglobat poate fi privit ca un sistem cu intrarea y și ieșirea u. Dinamica acestui sistem este descrisă de :

$$\dot{z} = (A+BK+LC)z - Ly \qquad \text{deci:}$$

$$z = -he^{(A+BK+LC)t}L * y \qquad \text{și prin urmare}$$

$$u = -hKe^{(A+BK+LC)t}L * y$$

Schema de principiu a regulatorului cu estimator de stare este dată în fig.X-2

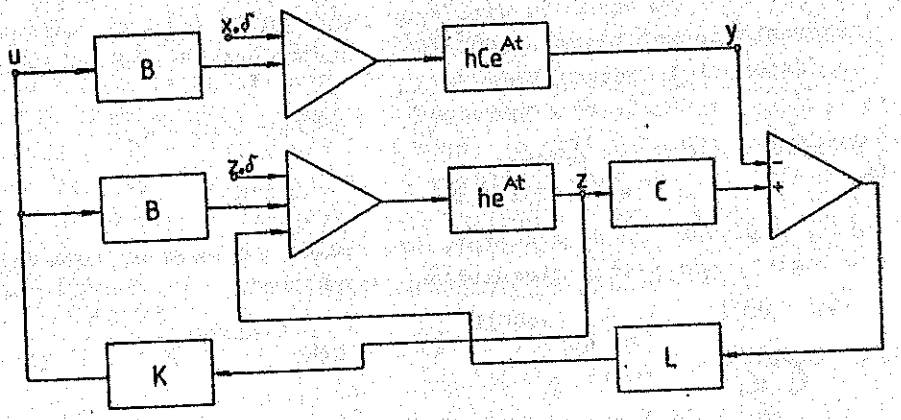


Fig.X-2

După cum vom vedea, ideea regulatorului cu estimator de stare este utilizată în realizarea filtrului Kalman.

Să luăm, ca exemplu de estimare a stărilor, dublul integrator descris de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = [1 \quad 0]$$

.//.

Aşadar se dau ecuaţiile:

$$Dx_1 = x_2 + x_{1o}\delta$$

$$Dx_2 = u + x_{2o}\delta$$

$$y = x_1$$

Matricea estimatorului este $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$; pentru $l_1=5$ şi $l_2=6$ avem

$$A + LC = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

cu polinomul caracteristic $\varkappa = \lambda^2 + 5\lambda + 6$; $\lambda_1=-2$; $\lambda_2=-3$

Aşadar acesta este un estimator asimptotic. Să arătăm răspunsul estimatorului la perturbaţia : $x_{1o}= -1$; $x_{2o} = 1$. După calcule, eroarea de estimare este:

$$\tilde{x}_1 = 3e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

$$\tilde{x}_2 = 9e^{-2t} - 8e^{-3t}$$

De aci rezultă răspunsul estimatorului:

$$z_1 = (t-1)h - 3e^{-2t} + 4e^{-3t}$$

$$z_2 = h - 9e^{-2t} + 8e^{-3t}$$

Reprezentarea estimării este dată în fig.X-3

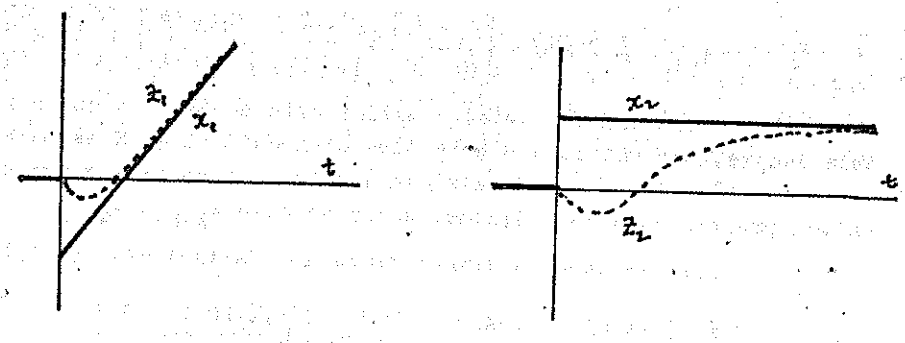


Fig.X-2

Se observă că z_1 urmăreşte bine pe x_1, deoarece $y = x_1$. Starea x_2 este iniţial influienţată de faptul că estimatorul preia la intrare x_1, iar după un timp oarecare începe urmărirea asimptotică. Repetăm ideea că observabilitatea este o condiţie esenţială pentru estimare.

.//.

Rescriem ecuaţiile sistemului cu estimator şi regulator în modul următor:

$$Dx=(A+BK)x- BK\tilde{x}+x_0\delta$$
$$D\tilde{x}=(A+LC)\tilde{x} + \tilde{x}_0\delta$$

Sistemul echivalent extins este deci:

$$D\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A+BK & -BK \\ \hline 0 & A+LC \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ \tilde{x}_0 \end{bmatrix}\delta$$

Acest sistem are dimensiunea 2 n, iar în dinamica lui x apar cele 2 n moduri.

Polinomul caracteristic este

$$\varkappa = \varkappa_{A+BK}\cdot\varkappa_{A+LC}$$

Prin urmare, sistemul extins este asimptotic stabil, dacă A_k şi A_L sînt asimptotic stabile. Dacă dorim să punem în evidenţă şi dinamica estimatorului, atunci scriem ecuaţiile:

$$Dx = Ax + BKz + x_0\delta$$
$$Dz = -LCx +(A+BK+LC)z + z_0\delta$$

Rezultă sistemul extins:

$$D\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & BK \\ \hline -LC & A+BK+LC \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\delta$$

Matricea de stare a acestui sistem poate fi pusă în forma:

$$A_{kL} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{H}\tilde{C} = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline I & B \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} -L & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} C & -C \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

Prin urmare sistemul extins este echivalent cu un reglaj dela ieşire, unde matricea H este bloc diagonală (L şi K se calculează independent). Să arătăm că matricea acestui sistem extins are aceleaşi valori proprii date de polinomul caracteristic $\varkappa_{A+BK}\cdot\varkappa_{A+LC}$.

Prin următoarea transformare de similaritate se obţine:

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -I \\ \hline 0 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & BK \\ \hline -LC & A+BK+LC \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & I \\ \hline 0 & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A+LC & 0 \\ \hline -LC & A+BK \end{array}\right]$$

şi rezultă imediat că valorile proprii sînt aceleaşi. Aşadar acest sistem este şi el asimptotic stabil, dacă A_k şi A_L sînt asimptotic stabile, prin urmare atît x cît şi z tind la zero pentru $t\to\infty$, oricare ar fi perturbaţia $\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$.

.//.

imator şi regulator

δ

iar în dinamica lui x

simptotic stabil,dacă
punem în-evidenţă şi

$\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\delta$

poate fi pusă în forma:

$$\begin{bmatrix} -L & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & -C \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

hivalent cu un reglaj
i (L şi K se calculează
stem extins are aceleaşi

χ_{A+BK} χ_{A+LC}.

ilaritate se obţine:

$$\begin{bmatrix} A+LC & 0 \\ C & A+BK \end{bmatrix}$$

eleaşi. Aşadar acest
i A_L sînt asimptotic
ero pentru $t \to \infty$,

Pentru ilustrare să considerăm din nou dublul integrator:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \quad ; \quad K = \begin{bmatrix} -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{AL} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 \quad ; \quad \chi_{Ak} = \lambda^2 + 5\lambda + 4$$

Formăm matricea sistemului extins în x şi z :

$$A_{LK} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 5 & 0 & -5 & 1 \\ 6 & 0 & -10 & -5 \end{pmatrix} \qquad (1\times1)(2\times2)(2\times1) = (1\times1)$$

Calculînd polinomul caracteristic rezultă:

$$\chi_{A_{KL}} = \lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24 = (\lambda^2+5\lambda+6)(\lambda^2+5\lambda+4) = \chi_{AL}\cdot\chi_{Ak}$$

După cum vom vedea ulterior, principiul acestei scheme este utilizat la filtrul Kalman - Bucy, dar pentru sisteme liniare variabile Matricea L se calculează astfel încît estimarea să se facă minimizînd eroarea, iar regulatorul K se calculează apoi după un indice de performanţă dat.

In practică, şi în special în practica de aviaţie, filtrul Kalman este utilizat cu succes, fiind în prezent extins şi la cazul neliniar. Aşadar principiul schemei prezentate aci este important, deoarece se regăseşte în schemele practice de automatizare a zborului.

A-3. Răspunsul la comenzi; decuplarea comenzilor

Pînă acum am discutat reglajul în scop de stabilizare a sistemului la perturbaţii. Aceasta ar corespunde, de exemplu, cazului cînd un avion se află în zbor de croazieră, la altitudine constantă, cu viteză constantă, aproximînd traectoria cu o linie dreaptă. Sursele instantanee de perturbaţie pot fi cele din atmosferă. Sarcina automatului este ca la apariţia unei astfel de perturbaţii, avionul să fie readus la programul de croazieră. Ne punem acum următoarea problemă: zborul avionului este automatizat, dar dorim ca avionul oă răspundă şi la comenzi. Aceasta se obţine, de exemplu, prin alegerea unei legi de reglaj:

$$u = Kx + v \qquad \text{X-30}$$

unde K reprezintă regulatorul după stare, iar v comanda exterioară. Rezultă:

$$Dx = (A+BK)x + Bv + x_o\delta$$

şi deci:

$$x = he^{(A+BK)t} x_o + he^{(A+BK)t} B * v$$

Pentru v=o avionul se află în regim de stabilizare la perturbaţii (dinamica liberă a sistemului) iar pentru x_o= o se află în regim comandat (răspunsul la comenzi al sistemului).

In cazul reglajului dela ieşire, obţinem acelaş rezultat, dar cu matricea A+BHC.

Prin urmare, calculul regulatorului nu diferă de cel expus în paragrafele precedente.

In plus, sistemul poate fi caracterizat prin matricea de transfer care apare în răspunsul la comenzi:

$$y = hCe^{(A+BK)t} B * u = G * u$$

Cu transformata Laplace avem:

$$G(s) = C\left[sI-(A+BK)\right]^{-1} B = \frac{1}{\chi_{A+BK}} C\left[sI-(A+BK)\right]^{*} B$$

unde $\left[sI-(A+BK)\right]^{*}$ este matricea cofactor care apare la inversare, iar χ_{A+BK} polinomul caracteristic. Dacă dimensiunea sistemului este n, gradul polinomului caracteristic este tot n, iar termenii din matricea cofactor sînt de grad cel mult n-1.

Dimensiunea matricei G(s) este de p linii şi m coloane; termenii care o compun sînt fracţii de polinoame în s, cu gradul numitorului mai mare decît al numărătorului.

.//.

Aşadar G(t) este o matrice de tip funcţie (nu conţine distribuţii). Dacă polinomul caracteristic nu este simplificabil cu un factor dela numărător, atunci valorile proprii ale matricei A+BK coincid cu polii lui G(s).

Matricea de transfer este invariantă la o transformare de forma

$$x = Tz \quad ; \det T \neq 0$$

Intr-adevăr, avem

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \qquad X\text{-}31$$
$$y_z = CTz$$

Rezultă:

$$G(s) = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B = C\left[T(sI-A)^{-1}T^{-1}\right]B$$

aşadar:

$$\boxed{G(s) = C(sI-A)^{-1}B}$$

Evident, polinomul caracteristic este şi el invariant la această transformare. Pentru sistemele scalare (m= p = 1) matricea de transfer se reduce la o funcţie raţională:

$$G(s) = \frac{P(s)}{R(s)}$$

Dacă P şi R sîntprime între ele, atunci grad R(s)= n este dimensiunea spaţiului stărilor, şi este cea minimă (realizare minimală). Dacă se dă funcţia de transfer, atunci se poate trece la scrierea matricială a ecuaţiilor sistemului, adică la determinarea matricelor A, B, C. Evident, soluţia nu este unică, deoarece în X-31 matricea T poate fi orice matrice nesingulară. O scriere imediată este forma "companion"

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & \cdots\cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} b_0, & b_1 \cdots 0 \cdots 0 \end{bmatrix}$$

unde a_i sînt coeficienţii polinomului R(s), cu a_n termen liber, iar bj sînt coeficienţii lui P(s), cu b_0 termen liber. Ca exerciţiu, să se arate că această realizare este controlabilă şi observabilă. Acest rezultat este general : matricea de transfer (corespunzătoare realizării minimale), pune în evidenţă partea controlabilă şi observabilă a sistemului (altfel, conţine linii şi coloane nule).

Originalul matricei G(s) este:

$$\mathcal{L}^{-1}\, G(s) = hCe^{At}B$$

.//.

Aceasta este o matrice pxm, cu elemente funcţii, considerate ca multiplicatori pe $\mathcal{D}'$ ai distribuţiei Heaviside H, deci sînt în $\mathcal{D}'_+$.

La expresiile de mai sus poate fi considerat A (sistem nereglat), A_k (reglat după stare), sau A_H (reglat dela ieşire).

O problemă importantă pentru răspunsul la comenzi este "decuplarea comenzilor". Pentru aviaţie, aceasta este o problemă foarte importantă; într-adevăr, în paragraful IX-3 am dat ca exemplu dinamica longitudinală a unui avion la care comanda motorului acţiona direct asupra vitezei avionului, fără a perturba alte stări. Ideea poate fi generalizată şi extinsă pentru matricea de transfer. Să introducem o matrice F(s) la intrarea lui G(s), cu comanda notată cu v. Atunci:

$$\mathcal{L}y = C(sI-A)^{-1}B \cdot \mathcal{L}u \ ;$$

$$\mathcal{L}u = F(s)\mathcal{L}v \quad \text{deci}$$

$$\mathcal{L}y = C(sI-A)^{-1}BF(s)\mathcal{L}v$$

Matricea de transfer $v \mapsto y$ este deci

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}BF(s) = G(s)F(s) \qquad \text{X-32}$$

Deoarece F(s) poate fi aleasă arbitrar, putem impune condiţii asupra lui W, şi căuta soluţii pentru F(s). Să presupunem de exemplu că am ales dimensiunea lui v egală cu a lui y. Atunci W este o matrice pătrată. Dacă poate fi diagonalizabilă, atunci relaţia $v \mapsto y$ este scalară şi avem:

$$\mathcal{L}y_i = W_{ii}\mathcal{L}v_i$$

(a)

În acest caz fiecare comandă scalară acţionează asupra ieşirii corespunzătoare, fără a influienţa celelalte ieşiri. Acest caz este denumit "decuplare scalară". Dacă W nu este pătrată, atunci ea poate fi diagonalizată pe blocuri, astfel încît o partiţie a comenzilor este decuplată de o partiţie a ieşirilor, adică decuplarea este vectorială.

Să privim acum ecuaţia X-32 în necunoscuta F(s); sînt posibile mai multe cazuri de compatibilitate. De exemplu, dacă G(s) este inversabilă (în $\mathcal{D}'_+$) atunci avem:

$$F(s) = G(s)^{-1}W(s)$$

şi problema are soluţie. Aceasta implică însă ca G(s) să fie o matrice pătrată, adică numărul de borne de intrare să fie egal cu numărul de borne de ieşire.

Decuplarea comenzilor cu matricea F(s) poate introduce instabilităţi interne, deoarece F(s) poate rezulta cu poli în semiplanul drept. Uneori, în aplicaţii practice, poate da satisfacţie o matrice F reală, care nu decuplează în regim tranzitoriu, dar decuplează în

.//.

(6) valcare finală (static). Acest caz este denumit "decuplare statică" şi are avantajul că nu introduce instabilităţi interne, iar dispozitivele cu care se realizează sînt numai elemente proporţionale. Avem deci:

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}BF$$

unde F este o matrice reală. Să presupunem acum că se aplică o comandă treaptă pe toate bornele, adică:

$$\mathcal{L}y = C(sI-A)^{-1}BF \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \vdots \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Presupunem că sistemul este reglat, astfel încît A este asimptotic stabilă, deci este şi inversabilă. Atunci, aplicînd teorema valorii finale ar trebui să rezulte:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = -CA^{-1}BF \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

adică la limită răspunsul să coincidă cu comanda dată. O soluţie imediată ar fi ca matricea $CA^{-1}BF$ să fie matricea unitate, dar aceasta implică un număr de comenzi egal cu numărul de ieşiri. În orice caz F rezultă ca pseudoinversa; într-adevăr, din

$$CA^{-1}BF = I$$

rezultă

$$F = \left[CA^{-1}B\right]^{+}$$

X-33

În aviaţie, unele automate de aterizare utilizează decuplarea statică; vectorul de stare este:

$$x = |\, q,\ u,\ \gamma,\ \theta >$$

unde q este viteza de tangaj, u viteza aeronavei, γ unghiul dintre vectorul viteză şi panta de aterizare (unghiul de traiectorie) şi θ unghiul de tangaj. Comanda este

$$u = |\, \delta_P,\ \delta_T,\ \delta_F,\ \delta_S >$$

unde δ. sînt unghiuri de bracare pentru: profundor, tracţiune, flapsuri şi spoilere.

Se urmăreşte decuplarea statică a vitezei u, tangajului θ şi a unghiului la traiectorie γ, deci vectorul de comandă se ia

$$v = |\, u_c,\ \gamma_c,\ \theta_c >$$

şi se cere ca aceste comenzi să fie decuplate static cu ieşirea :

$$y = |\, u,\ \gamma,\ \theta >$$

.//.

Matricele A, B,C sînt cunoscute; se calculează mai întîi regulatorul K, după care sistemul ce trebue decuplat este A_k, B,C. Matricea F de decuplare rezultă din X-33. Este uşor de sesizat cît de important este pentru aterizare ca viteza şi unghiurile γ şi θ să fie comandate decuplat. Faptul că decuplarea este statică nu deranjează, deoarece regimul tranzitoriu este îmbunătăţit atunci cînd se calculează regulatorul (matricea A_k se dimensionează asimptotic stabilă şi realizează un indice de performanţă dat). Se presupune că avionul este stabilizat lateral, deci aterizarea nu implică decît comenzi pentru dinamica longitudinală.

Evident, problema decuplării poate fi ataşată oricărei legi de reglare, dacă se introduce o comandă suplimentară şi matricea de decuplare. De exemplu, în cazul compensatorului dinamic ecuaţiile devin:

$$Dx = Ax + Bu + x_0\delta$$
$$y = \mathbb{C}x$$
$$Dz = Fz + Gy$$

iar legea de reglaj se ia

$$u = Kz + Hy + Jv$$

unde v este comanda exterioară iar J matricea ataşată pentru decuplare.

Calculul matricelor F, G, H, J, K poate fi realizat şi în vederea aplicării unei comenzi exterioare v_k de forma $\sum u_k(h_k - h_{k-1})$, obţinută dela un calculator ataşat sistemului. In acest caz se poate lua în condiderare stabilizarea sistemului în timp finit cu comanda suplimentară v_k. Toate metodele descrise în capIX îşi păstrează valabilitatea.

culează mai întîi
at este A_k, B,C. Ma-
de sesizat cît de
urile γ şi θ să fie
ică nu deranjează,
ci cînd se calculează
ic stabilă şi reali-
că avionul este sta-
comenzi pentru dina-

ataşată oricărei legi
ară şi matricea de
inamic ecuaţiile devin:

ţată pentru decuplare.
te fi realizat şi în
orma $\sum u_k(h_k-h_{k-1})$,
n acest caz se poate
mp finit cu comanda
X îşi păstrează va-

CAP.XI. Optimizare şi performanţe

XI-1. Ecuaţia lui Euler.

Formulăm problema calculului variaţional în modul următor: se dă funcţionala

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \qquad \text{XI-1}$$

unde x, y, y' sînt scalari, iar F este de clasă C^2 în raport cu toate argumentele, deci posedă derivate de ordinul II, continue. Se caută o funcţie y= f(x) care să realizeze un extremum al funcţionalei XI-1, satisfăcînd şi condiţiile bilocale:

$$y_0 = f(x_0) \quad ; \quad y_1 = f(x_1)$$

Presupunem y" continuă pe intervalul (x_0, x_1). Procedăm într-un mod oarecum analog cu determinarea extremumului unei funcţii, cu ajutorul derivatei . Construim o funcţie $\eta(x)$:

$$y = f(x) + \varepsilon\,\eta(x) \qquad \text{XI-2}$$

unde ε este un parametru care nu depinde de x, iar $\eta(x)$ este o funcţie cu derivata $\eta'(x)$ continuă. La capetele intervalului avem

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

deoarece considerăm punctele dela capete fixate. Introducînd XI-2 în XI-1 rezultă:

$$J(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x) + \varepsilon\eta, f'(x) + \varepsilon\eta')\,dx$$

Pentru ca J să aibă un extremum pentru $\varepsilon = 0$ este necesar ca

$$\left[\frac{dJ}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0$$

Calculînd derivata rezultă:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial(y+\varepsilon\eta)}\eta + \frac{\partial F}{\partial(y'+\varepsilon\eta')}\eta' \right) dx$$

Punînd acum $\varepsilon = 0$ obţinem:

$$\left[\frac{dJ}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) dx = 0$$

./.

Se poate elimina η' integrînd prin părţi termenul respectiv:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \, dx$$

Deoarece $\eta(x)$ de anulează la capete obţinem:

$$\left[\frac{dJ}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \, dx = 0$$

In această expresie $\eta(x)$ este arbitrară, în afară de condiţiile la limită. Lema fundamentală a calculului variaţional arată că dacă o funcţie $\varphi(x)$ continuă pe $[x_0, x_1]$ satisface relaţia:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \varphi(x) dx = 0$$

în care $\eta(x)$ este arbitrară dar cu $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, iar $\eta'(x)$ este continuă pe $[x_0, x_1]$, atunci:

$$\varphi(x) \equiv 0 \qquad x_0 \leq x \leq x_1$$

In calculul cu distribuţii am mai întîlnit această proprietate. Aşadar în final condiţia de extremum a funcţionalei este:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \text{XI-3}$$

Uneori o vom scrie cu notaţii prescurtate pentru derivatele parţiale:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Aceasta este ecuaţia lui Euler ; ea este o ecuaţie diferenţială, de ordinul doi, ordinară. Similar cu cazul anulării derivatei, funcţiile y care satisfac ecuaţia lui Euler îndeplinesc o condiţie necesară, dar nu şi suficientă, pentru realizarea extremumului funcţionalei. Suficienţa rezultă din semnul variaţiei de ordinul doi a funcţionalei. Numim „extremale" funcţiile y care satisfac ecuaţia lui Euler. Prin urmare, orice y, care realizează un extremum relativ al funcţionalei, este o extremală, dar nu orice extremală realizează un extremum.

Pentru ilustrare vom considera două exemple din cele mai cunoscute.

1°) Se cere arcul cel mai scurt care uneşte două puncte date din plan. Lungimea arcului este

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

.//.

Aşadar trebuie să minimizăm distanţa

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$F = \sqrt{1 + y'^2}$ nu depinde de y rezultă imediat

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = a$$

unde a este o constantă arbitrară. Aşadar :

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a$$ de unde rezultă y' constant. Aceasta este ecuaţia tuturor dreptelor din plan. Dreapta căutată se determină punînd condiţia să treacă prin cele două puncte date.

2^0. Brachistocrona lui Bernoulli este traectoria unui corp care pleacă dintr-un punct O şi ajunge într-un punct A, în cădere liberă, în minimum de timp. Se cere această traectorie. Să presupunem că corpul pleacă din origine şi trebue să ajungă în punctul A, de coordonate (x_1, y_1). Pentru un element de arc al traectoriei avem:

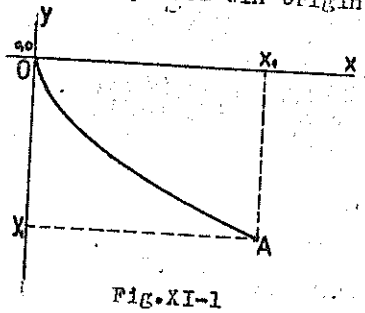


Fig.XI-1

$$ds = v\,dt$$

In cădere liberă viteza este

$$V = \sqrt{2gy}$$

Atunci timpul realizat dela O la A este

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\, dx$$

Scrilnd ecuaţia lui Euler şi aducînd-o la o formă mai simplă se obţine:

$$-\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = a$$

unde a este o constantă arbitrară. Prin separarea variabilelor obţinem:

$$dx = \sqrt{\frac{y}{k^2 - y}}\, dy \quad ; \quad k = \frac{1}{a}$$

Cu schimbarea de variabilă $y = k^2 \sin^2 t$ se obţine o familie de curbe date parametric:

$$x = \frac{k^2}{2}(2t - \sin 2t)$$

$$y = \frac{k^2}{2}(1 - \cos 2t)$$

.//.

Aceasta este o familie de cicloide care trec prin origine. Constanta K se determină punînd condiţia ca cicloida căutată să treacă prin punctul A.

Dezvoltînd ideea lui Euler, Poisson a dat o teoremă pentru un caz mai general. Fie $F(t, y, y', \ldots, y^n)$ o funcţie de clasa $C^{n+1}[t_1, t_2]$. Dacă y realizează un extremum relativ al funcţionalei:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^n)\,dt$$

atunci y este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale:

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{y}} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{y^n} = 0$$

XI-4

De asemenea, Lagrange a dat o teoremă pentru cazul cînd

$$x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$$

unde x_i sînt funcţii de t. Fie $F(t, x, \dot{x})$ o funcţie de clasă $C^2[t_1, t_2]$; dacă x realizează un extremum relativ al funcţionalei:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\,dt$$

atunci x_i verifică sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$F_{x_k} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_k} = 0 \qquad \text{XI-5}$$

Acesta este sistemul de ecuaţii Euler - Lagrange.

Calculul variaţional a fost extins şi pentru distribuţii; în general însă, operaţiile implicate $F(t, x, \dot{x})$ nu au sens în distribuţii. In cazul în care operaţiile au sens, atunci obţinem "liniile admisibile" şi aplicarea calculului variaţional este posibilă. De exemplu o expresie de forma $t^2 x_1 \dot{x}_1$ conţine linii admisibile, de exemplu pentru $x_1 = \delta$ rezultă $(t^2\delta)\delta' = 0$, ceeace are sens. De asemenea, pentru $x_1 = \delta'$ avem linii admisibile $(t^2\delta')\delta'' = 0$. Lema fundamentală (Lagrange) a calculului variaţional este conţinută în teorema următoare din distribuţii: condiţia necesară şi suficientă ca o distribuţie $f \in \mathcal{D}'_I$ să fie nulă pe I este:

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_I$$

./.

Dacă $f \in C^0$ atunci evident $\langle f, \varphi \rangle = \int_\tau f\varphi = 0 \; ; \; \forall \varphi \in \mathcal{D}_\tau$

are loc numai dacă f=o . De asemenea dacă $f \in C^1$ avem

$$\langle f, \varphi' \rangle = - \langle f', \varphi \rangle = - \int f'\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_\tau$$

are loc numai dacă f' = o (lema Du Bois Raymond).

XI. Multiplicatorii lui Lagrange.

Dat fiind scopul aplicativ, prezentăm problema pentru un sistem de referinţă cartezian Oxyz. Se cere să se realizeze un extremum al funcţionalei.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,dt$$

cu restricţia $G(x, y, z) = o$

Funcţiile de t : x, y, z au valori date pentru $t = t_0$ şi $t = t_1$. Să presupunem că funcţiile u(t), v(t) şi w(t) realizează extremumul funcţionalei. Atunci scriem:

$$x = u + \varepsilon_1 \eta_1$$
$$y = v + \varepsilon_2 \eta_2$$
$$z = w + \varepsilon_3 \eta_3$$

unde ε şi η au semnificaţiile din paragraful precedent. Introducînd în funcţionala dată se obţine:

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \int_{t_0}^{t_1} F(t; u+\varepsilon_1\eta_1, v+\varepsilon_2\eta_2, w+\varepsilon_3\eta_3, \dot{u}+\varepsilon_1\dot{\eta}_1, \dot{v}+\varepsilon_2\dot{\eta}_2, \dot{w}+\varepsilon_3\dot{\eta}_3)\,dt$$

Analog cu procedeul din paragraful precedent, eliminăm pe $\dot{\eta}$ integrînd prin părţi, şi se obţine:

$$[dJ]_{(0,0,0)} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(F_u - \frac{d}{dt}F_{\dot{u}}\right)\varepsilon_1\eta_1 + \left(F_v - \frac{d}{dt}F_{\dot{v}}\right)\varepsilon_2\eta_2 + \left(F_w - \frac{d}{dt}F_{\dot{w}}\right)\varepsilon_3\eta_3 \right] dt = 0$$

Această relaţie însă trebue să aibă loc în condiţiile satisfacerii restricţiei:

$$G(u+\varepsilon_1\eta_1, v+\varepsilon_2\eta_2, w+\varepsilon_3\eta_3) = 0$$

De aici deducem:

$$dG = G_u\varepsilon_1\eta_1 + G_v\varepsilon_2\eta_2 + G_w\varepsilon_3\eta_3 = 0$$

.//.

Ideea lui Lagrange constă în a introduce o funcţie arbitrară $\lambda(t)$ care să satisfacă relaţia:

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) \left[G_u \xi_1 \eta_1 + G_v \xi_2 \eta_2 + G_w \xi_3 \eta_3 \right] dt = 0$$

ceeace este evident, deoarece $dG=0$. Această relaţie se poate însă introduce în expresia lui dJ şi se obţine:

$$\int_{t_0}^{t_1} (F_u - \frac{d}{dt} F_{\dot{u}} + \lambda G_u) \xi_1 \eta_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} (F_v - \frac{d}{dt} F_{\dot{v}} + \lambda G_v) \xi_2 \eta_2 dt + \int_{t_0}^{t_1} (F_w - \frac{d}{dt} F_{\dot{w}} + \lambda G_w) \xi_3 \eta_3 dt = 0$$

Dacă nu au loc simultan relaţiile:

$$G_x = G_y = G_z = 0$$

atunci rezultă condiţiile:

$$\begin{aligned} &1.\ F_u - \frac{d}{dt} F_{\dot{u}} + \lambda G_u = 0 \\ &2.\ F_v - \frac{d}{dt} F_{\dot{v}} + \lambda G_v = 0 \\ &3.\ F_w - \frac{d}{dt} F_{\dot{w}} + \lambda G_w = 0 \\ &4.\ G(u, v, w) = 0 \end{aligned} \qquad \text{XI -4}$$

Acestea sînt patru relaţii, cu patru necunoscute : u, v, w, λ . Funcţia necunoscută $\lambda(t)$ este denumită "multiplicatorul lui Lagrange". Pentru ilustrare să luăm ca exemplu calculul geodezicelor. Distanţa dintre două puncte, într-un sistem Oxyz este dată, sub formă parametrică, de funcţionala

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

unde t_0 şi t_1 fixează cele două puncte date. Să presupunem acum că se cere ca arcul care uneşte cele două puncte să fie situat pe suprafaţa:

$$G(x, y, z) = 0$$

Problema geodezicelor este de a găsi arcul de lungime minimă, care se află pe suprafaţa G şi care uneşte cele două puncte date. Aşadar trebuie găsit un extremum al funcţionalei J, supus la restricţia G. Funcţiile x(t), y(t), z(t) au derivate de ordinul

.//.

întîi continue şi satisfac condiţiile bilocale date în t_0 şi t_1. Aplicînd multiplicatorul lui Lagrange rezultă imediat:

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{F}+\lambda G_x=0 \qquad F=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{F}+\lambda G_y=0$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{F}+\lambda G_z=0 \qquad \text{XI-5}$$

Eliminînd pe λ se obţine:

$$\frac{\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{F}}{G_x}=\frac{\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{F}}{G_y}=\frac{\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{F}}{G_z} \qquad \text{XI-6}$$

Acestea sînt ecuaţiile diferenţiale cu care se calculează geodezicele.

Pentru ilustrare luăm ca exemplu ortodroma. In primă aproximaţie, globul terestru este considerat sferic; în aceste condiţii se pune problema determinării traectoriei de distanţă minimă, între două puncte date, pe o sferă. Aşadar, problema este de a găsi geodezica pe sferă. Ecuaţia sferei cu centrul în origine este.

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

unde R este raza sferei. Aceasta este restricţia $G(x,y,z)=0$. Prin urmare:

$$G_x=2x \; ; \; G_y=2y \; ; \; G_z=2z$$

Introducînd în XI-6 rezultă:

$$\frac{F\ddot{x}-\dot{x}\dot{F}}{2xF^2}=\frac{F\ddot{y}-\dot{y}\dot{F}}{2yF^2}=\frac{F\ddot{z}-\dot{z}\dot{F}}{2zF^2}$$

Calculînd mai departe obţinem:

$$\frac{y\ddot{x}-x\ddot{y}}{y\dot{x}-x\dot{y}}=\frac{z\ddot{y}-y\ddot{z}}{z\dot{y}-y\dot{z}}=\frac{\dot{F}}{F}$$

Din primii doi termeni se deduce

$$\frac{\frac{d}{dt}(y\dot{x}-x\dot{y})}{y\dot{x}-x\dot{y}}=\frac{\frac{d}{dt}(z\dot{y}-y\dot{z})}{z\dot{y}-y\dot{z}}$$

Prin integrare:

$$y\dot{x}-x\dot{y}=a(z\dot{y}-y\dot{z})$$

unde a este constantă arbitrară. Această ecuaţie poate fi rescrisă astfel:

$$\frac{\dot{x}+a\dot{z}}{x+az}=\frac{\dot{y}}{y}$$

.//.

Integrînd din nou se obține : $x + az = by$

unde a și b sînt constante arbitrare. Aceasta este ecuația planurilor care conțin originea. Intersecția unui astfel de plan cu sfera determină un cerc mare al sferei. Arcul se fixează făcînd cercul să treacă prin cele două puncte date. Așadar geodezica pe sferă este un arc al cercului mare pe sferă.

In navigație și ghidaj se dau puncte obligate pe traseu. In mod normal, traiectoria între două puncte succesive pe traseu este o ortodromă.

Intr-o aproximație mai exactă globul terestru este considerat un elipsoid de rotație în jurul axei mici N-S. In acest caz geodezica este dată de restricția G care reprezintă suprafața elipsoidului.

In cazul în care $\begin{cases} G = |G_1, G_2, \dots, G_\mu> \\ x = |x_1, x_2, \dots, x_n> \end{cases}$ $\mu < n$

multiplicatorul lui Lagrange devine :

$$\lambda = |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu>$$

Procedeul de aplicare este următorul : se formează lagrange-ianul

$$H = F + <\lambda | G> = F + \sum_1^\mu \lambda_i G_i \qquad \text{XI-7}$$

Extremalele satisfac sistemul de ecuații diferențiale:

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n. \qquad \text{XI-8}$$

Necunoscutele sînt x și λ, deci $n + \mu$ necunoscute scalare. Din XI.8 rezultă n ecuații, iar restricțiile sînt în număr de μ, deci $n + \mu$ ecuații.

XI-3. Condiții la limită

In cele de mai sus am considerat capetele fixate, ceeace conducea la

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

Să presupunem acum că $x = x_0$ este fixat și $y(x_0)$ este dat. Punem încă condiția ca $y(x_1) = G(x_1)$ unde $G(x)$ este o curbă dată.

.//.

In acest mod, condiţia la limită pentru capătul x_1 este liberă. Să considerăm atunci $u(x)$ extremala căutată, deci:

$$y = u(x) + \varepsilon\eta(x)$$

Capătul iniţial fiind dat avem $\eta(x_0) = 0$. Pentru cel de al doilea capăt scriem curba dată sub forma parametrică, deci:

$$x = x_1(\varepsilon) \quad ; \quad y = g(x_1(\varepsilon))$$

Funcţionala care trebue extremizată este

$$J(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1(\varepsilon)} F(x, y, y')\,dx$$

Extremumul are loc dacă:

$$\left[\frac{dJ}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0$$

Inlocuind:

$$\left[\frac{dJ}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1(0)} \left[F_u\eta + F_{u'}\eta'\right]dx + \left[F(x, u, u')\right]_{x=x_1(0)} \frac{dx_1(0)}{d\varepsilon} = 0$$

Pe de altă parte:

$$y(x_1(\varepsilon)) = g(x_1(\varepsilon)) = u(x_1(\varepsilon)) + \varepsilon\eta(x_1(\varepsilon))$$

Derivînd prin raport cu ε şi punînd $\varepsilon = 0$ rezultă

$$\frac{dx_1(0)}{d\varepsilon} = \frac{\eta(x_1(0))}{g'(x_1(0)) - u'(x_1(0))}$$

Inlocuind în funcţională şi integrînd prin părţi se obţine:

$$\int_{x_0}^{x_1(0)} \left(F_u - \frac{d}{dx} F_{u'}\right)\eta\,dx + \left[\left(F_{u'} + \frac{F}{g' - u'}\right)\eta\right]_{x_1(0)} = 0$$

Primul termen arată că extremala satisface ecuaţia lui Euler, iar cel de al doilea ne dă condiţia de transversalitate:

$$F_{u'} + \frac{F}{g' - u'} = 0 \qquad \text{pentru } x = x_1$$

.//.

Evident, avem $y(x_0)$ dat, deoarece am considerat capătul x_0 fixat. In mod analog.pot fi deduse condiţiile la limită cînd se lasă ambele capete libere. Condiţiile transversalitate trebuieso satisfăcute la ambele capete, deci

$$F + (f' - u') F_{u'} = o \quad \text{pentru} \quad x = x_0$$
$$F + (g' - u') F_{u'} = o \quad \text{pentru} \quad x = x_1 \qquad \text{XI-9}$$

XI-4 Ecuatia Hamilton - Jacobi

Se dă sistemul: XI-1o

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

unde

$$x = |x_1, x_2, \ldots, x_n>$$
$$u = |u_1, u_2, \ldots, u_m>$$
$$f = |f_1, f_2, \ldots, f_n>$$

Ecuaţia XI-1o descrie sistemul prin starea $x(t)$ şi comanda $u(t)$.

In problemele de reglaj şi răspuns la comenzi se poate pune problema determinării comenzii optimale $u^o(x,t)$, care satisface o performanţă dată. De exemplu, performanţa se dă ca o funcţională şi se cere comanda optimală, în sensul că aceasta comandă realizează un extremum al funcţionalei.

Să considerăm o funcţie scalară $V(x,t)$ definită astfel:

$$V(x,t) = \int_t^{t_f} F(x, u^o, \tau)\, d\tau$$

unde t_f este timpul final, u^o este comanda optimală căutată, iar t este variabila timp. Observăm că:

$$\dot{V}(x,t) = - F(x, u^o, t) \qquad \text{XI-11}$$

Derivata s-a calculat ţinînd seama de faptul că limita inferioară a integralei depinde de t. Pe de altă parte $\dot{V}$ rezultă şi din:

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

Din XI-1o se poate elimina $\dot{x}_i$ şi rezultă:

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$$

.//.

Introducem gradientul lui V notat astfel

$$\nabla V = \left| \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right>$$

Atunci relaţia anterioară poate fi rescrisă astfel:

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla V \mid f \rangle \qquad \text{XI-12}$$

Egalînd membrul drept din XI-11 cu membrul drept din XI-12 rezultă:

$$\langle \nabla V(x,t) \mid f(x, u^0, t) \rangle + (x, u^0, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \text{XI-13}$$

Determ. curbe optimale

Aceasta este ecuaţia Hamilton- Jacobi; pentru determinarea comenzii optimale se poate proceda în modul următor:

1. Se formează Hamiltonianul

$$H(x, u, \nabla V, t) = \langle \nabla V \mid f \rangle + F$$

2. Se calculează minimul lui H prin raport cu u şi se determină:

$$u^0(x, \nabla V, t) \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^0$$

3. Se înlocueşte în expresia lui H şi se obţine:

$$H^0(x, u^0, \nabla V, t) = H^0(x, \nabla V, t)$$

4. Se rezolvă ecuaţia Hamilton- Jacobi, în necunoscuta V(x, t)

$$H^0(x, \nabla V, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

cu condiţiile la limită necesare.

5. Se introduce V(x,t) în expresia lui u^0, aflîndu-se astfel comanda optimală.

Ecuaţia Hamilton- Jacobi este o ecuaţie diferenţială, neliniară, cu derivate parţiale, de ordinul întîi. Pentru proiectarea regulatorului, această metodă are o valoare practică limitată. In cazul sistemelor liniare şi constante, aplicarea ecuaţiei Hamilton-Jacobi are o mare însemnătate practică, deoarece conduce la calculul direct al regulatorului după stare, cu legea de reglaj

$$u = Kx$$

unde necunoscuta este K.

XI-5. Ecuaţia matricială Riccati

Se dă sistemul liniar şi constant:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \text{XI-4}$$

Se dă indicele de performanţă:

$$J = \int_0^\infty (\langle x \mid Qx \rangle + \langle u \mid Ru \rangle) dt$$

.//.

unde $Q = Q'$ (simetrică), $Q \geq 0$ (cel puţin semipozitiv definită);
$P = P'$ (simetrică), $P > 0$ (pozitiv definită, deci nesingulară)

Deoarece Q este reală şi simetrică atunci avem

$$\langle x \mid Qx \rangle = \langle Qx \mid x \rangle$$

Dacă Q este pozitiv definită atunci poate fi pusă în forma

$$Q = V'V$$

Atunci produsul scalar poate fi scris şi astfel

$$\langle x \mid Qx \rangle = \langle Vx \mid Vx \rangle$$

Acest produs scalar verifică axiomele de normă; această normă este denumită şi "normă eliptică".

$$\langle Vx \mid Vx \rangle^{1/2} = 0 \iff x = 0$$
$$\langle a\,Vx \mid aVx \rangle^{1/2} = |a| \langle Vx \mid Vx \rangle^{1/2}$$

Pentru $x, y \in \mathbb{R}^n$ avem verificată şi axioma triunghiului:

$$\langle V(x+y) \mid V(x+y) \rangle^{1/2} \leq \langle Vx \mid Vx \rangle^{1/2} + \langle Vy \mid Vy \rangle^{1/2}$$

In cazul în care Q este semipozitiv definită, rezultă o seminormă. In concluzie, indicele de performanţă dat minimizează comanda şi starea în funcţie de această normă, deoarece:

$$J = \int_0^\infty (\langle x \mid Qx \rangle + \langle u \mid Pu \rangle)\,dt = \int_0^\infty (\|x\|_Q^2 + \|u\|_P^2)\,dt \qquad \text{XI-15.}$$

$x^T \cdot Q \cdot x$.

Se cere să se determine matricea de reglaj K astfel încît J să fie minim. Pentru rezolvarea problemei aplicăm metoda Hamilton-Jacobi; formăm

$$H(x, u, \nabla V, t) = \langle \nabla V \mid Ax + Bu \rangle + \langle x \mid Qx \rangle + \langle u \mid Pu \rangle \qquad (1)$$

Pentru minimizarea lui H prin raport cu u, considerăm comanda ca funcţie derivabilă, astfel încît minimul lui H se găseşte anulînd derivata. După efectuarea calculului se obţine:

$$B'\nabla V + 2\,Pu = 0 \qquad \text{de unde}$$

$$u^0 = -\frac{1}{2} P^{-1} B' \nabla V \qquad (2)$$

P^{-1} există deoarece $P > 0$. Calculăm acum:

$$H^0 = \langle \nabla V \mid Ax \rangle - \frac{1}{4} \nabla V' B P^{-1} B' \nabla V + \langle x \mid Qx \rangle$$

Ecuaţia Hamilton - Jacobi devine:

$$\langle \nabla V \mid Ax \rangle - \frac{1}{4} \nabla V' B P^{-1} B' \nabla V + \langle x \mid Qx \rangle + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

.//.

Necunoscuta este $V(x,t)$; căutăm acum soluţia ecuaţiei Hamilton- Jacobi în ipoteza că V este dat de

$$V(x,t) = \int_t^T (\langle x|Qx\rangle + \langle u|Pu\rangle)\, dt$$

cu condiţia la limită

$$V(x,T) = 0$$

Deoarece indicele este de formă patratică, $V(x,t)$ este o funcţie pozitiv definită.

Atunci căutăm $V(x,t)$ de forma

$$V(x,t) = \langle x \mid R(t)x\rangle \quad ; \quad R(T) = 0$$

unde R este funcţie numai de t şi $R(t) > 0$ (pozitiv definită), $R' = R$ (simetrică).

Calculăm acum :

$$\nabla V = 2Rx$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \langle x \mid \dot{R}x\rangle$$

Introducînd aceste expresii în ecuaţia Hamilton- Jacobi se obţine

$$x'(2RA - RBP^{-1}B'R + Q + \dot{R})x = 0$$

Deoarece într-o formă patratică numai partea simetrică contează, calculăm

$$\mathrm{sim}(2RA) = RA + A'R$$

Intrucît ecuaţia precedentă se verifică pentru x arbitrar obţinem în final

$$\dot{R} + Q - RBP^{-1}B'R + RA + A'R = 0 \qquad \text{XI-16}$$

cu condiţia $R(T)=0$. Dupa ce se rezolvă această ecuaţie în necunoscuta R, căutînd $R > 0$ şi $R' = R$, se introduce în expresia lui u^0 şi se obţine:

$$u^0 = -P^{-1}B'Rx = Kx$$

de unde:

$$K = -P^{-1}B'R \qquad \text{XI-17}$$

Acest regulator satisface indicele de performanţă XI-15.-

Ecuaţia Riccati XI-16 poate fi redusă la o ecuaţie algebrică, deoarece pe intervalul $(0,+\infty)$ avem $V(x,t)$= constant, deci R= constant. Atunci ecuaţia XI-16 devine:

$$RA + A'R + Q - RBP^{-1}B'R = 0 \qquad \text{XI-18}$$

Pt. $A = \alpha t$
$B = \beta t$.

.//.

care este ecuaţia redusă. Dacă se caută direct R simetric, atunci numărul necunoscutelor scalare din R se reduce la $\frac{1}{2}n(n+1)$, dar soluţia se caută pozitiv definită. Ecuaţia Riccati poate fi adusă la forma :

$$\begin{bmatrix} R & \vdots & -I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c:c} A & -BP^{-1}B' \\ \hdashline -Q & -A' \end{array}\right] \begin{bmatrix} \frac{\cdot}{\cdot} \\ R \end{bmatrix} = 0$$

Matricea care apare în această ecuaţie are aplicabilitate la calculul direct, algebric, al soluţiei R unice. Pentru aceasta recomandăm algoritmul Potter care constă în următoarele:

1. Cu matricele date A,B,Q,P, cu (A,B) stabilizabilă, se formează matricea:

$$M = \left[\begin{array}{c:c} A & -BP^{-1}B' \\ \hdashline -Q & -A \end{array}\right]$$

Procedeul este valabil numai dacă toate valorile proprii ale lui M au $Re\lambda \neq 0$.

2. Se calculează valorile proprii ale matricei M. Se demonstrează că aceste valori proprii au următoarea proprietate de simetrie: dacă λ este o valcare proprie, atunci $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ şi $-\bar{\lambda}$ ($\bar{\lambda}$ este cojugatul lui λ) sînt şi ele valori proprii. Ca urmare, n valori proprii sînt în C^- şi n în C^+. În plus, valorile proprii din C^- sînt chiar cele ale matricei A+BK, adică cele care rezultă pentru sistemul reglat.

Notăm cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii din C^- (am pus condiţia ca $\varsigma_p M$ să fie simplu)

$$Re\,\lambda_i < 0 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

3. Se calculează vectorii proprii $V_1, V_2, \ldots, V_n$ asociaţi valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Aşadar:

$$MV_i = \lambda_i V_i$$

4. Se partiţionează vectorii proprii V_i fiecare în cîte doi vectori de dimensiune n notaţi astfel:

$$V_i = \begin{bmatrix} s_i \\ \cdots \\ u_i \end{bmatrix}$$

5. Se formează matricea

$$S = [s_1 \vdots s_2 \vdots \cdots \vdots s_n]$$

6. Se formează matricea

$$N = [u_1 \vdots u_2 \vdots \cdots \vdots u_n]$$

.//.

(7) Soluţia ecuaţiei Riccati, unde R este simetrică şi pozitiv definită este

$$R = NS^{-1} \qquad \text{XI-19}$$

Pentru ilustrare, să luăm ca exemplu numeric dublul integrator:

Calculul regul. care

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se cere să se calculeze regulatorul care satisface indicele de performanţă dat de

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad P = 1$$

Explicitînd:

$$J = \int_0^\infty \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u^2 \right) dt = \int_0^\infty (4x_1^2 + u^2)\, dt$$

Scriem ecuaţia Riccati :

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Rezultă ecuaţiile

$$\begin{aligned} 4 - r_{12}^2 &= 0 \\ r_{11} - r_{12}\, r_{22} &= 0 \\ r_{11} - r_{12}\, r_{22} &= 0 \\ 2r_{12} - r_{22}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Cu soluţiile $r_{12} = 2$, $r_{22} = 2$, $r_{11} = 4$ formăm matricea

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

care este simetrică şi pozitiv definită. Matricea de reglaj rezultă:

$$K = -P^{-1}B'R = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Această matrice alocă polii daţi de valorile proprii ale matricei:

$$A_K = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{adică} \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

.//.

Algoritmul Potter:

Să vedem acuma cum se aplică algoritmul Potter. Formăm matricea

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuaţia caracteristică a acestei matrice este

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

deci:

$$\sigma_p M = \{-1+i;\ -1-i;\ 1-i;\ 1+i\}$$

cele două valori proprii din C^- sînt $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ şi coincid cu valorile proprii ale matricei A_k. Calculăm vectorii proprii asociaţi acestor valori proprii. Menţionăm că vectorii proprii asociaţi valorilor proprii complex conjugate sînt complex conjugaţi, ceeace reduce volumul de calcul. După efectuarea calculului rezultă:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1+i & -1-i \end{bmatrix} \quad ; \quad N = 2i \begin{bmatrix} 1-i & -1-i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Inversăm matricea S şi rezultă

$$S^{-1} = -\frac{1}{2i} \begin{bmatrix} -1-i & -1 \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea Riccati căutată este deci

$$R = NS^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

adică acelaş rezultat cu cel obţinut anterior din rezolvarea ecuaţiei Riccati. Menţionăm că pentru sistemele cu intrare scalară (m=1), rezultă o matrice K unică, prin orice procedeu de alocare a unor valori proprii specificate. Rezultă că pentru aceste sisteme poate fi aplicat următorul procedeu:

1. Cu A, B, Q, P date se formează matricea M
2. Se calculează $\sigma_p M$ şi se reţin valorile proprii din C^-.
3. Se aplică un procedeu de calcul al matricei K, alocînd valorile proprii dela punctul precedent.

* * Pentru sistemele cu m>1 acest procedeu nu este aplicabil, deoarece K nu rezultă unic decît prin rezolvarea ecuaţiei Riccati.

•//•

In încheere menţionăm că ecuaţia Riccati şi calculul regulatorului au fost demonstrate într-un cadru mai general şi anume pentru sisteme liniare variabile, la care matricele A şi B sînt funcţii de timp A(t), B(t). In acest caz ecuaţia XI-16 nu mai poate fi redusă la cea algebrică XI-18, deoarece matricea R este şi ea funcţie de timp R(t). Pentru acest caz au fost dezvoltate algoritme de calcul numeric şi programe care permit calculul regulatorului K în timp real, cu soluţie numerică. Astfel de programe sînt în prezent utilizate, de exemplu, la aterizarea automată. Necesitatea este evidentă, deoarece avionul nu poate ateriza în orice condiţii cu un regulator construit cu K= constant şi considerînd structura avionului rigidă. După cum este cunoscut, în ultimii ani au fost rezolvate şi alte probleme în legătură cu aterizarea, astfel încît cel puţin pentru cazuri speciale (de exemplu naveta spaţială), aterizarea se efectuiază fără posibilitatea de ratare (şi reluare după un tur de pistă).

XI-6. Proiectarea linear - patratică.

Ca punct de plecare, metoda linear-patratică se bazează pe teoria stabilităţii elaborată de Liapunov. Expunem aci numai ideile care conduc la metoda linear-patratică. Anterior s-a arătat că de la sistemul neliniar

$$\dot{X} = f(X, U) \qquad \text{XI-2o}$$

se poate trece la sistemul în primă aproximaţie:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \text{XI-21}$$

unde

$$x = X - X_p$$
$$u = U - U_p$$

— st. sf. cond. programate

X_p, U_p constante

In anumite condiţii sistemul în primă aproximaţie descrie satisfăcător abaterea dela programul dat a sistemului neliniar XI-2o. In continuare presupunem că aceste condiţii sînt îndeplinite. Calculăm regulatorul sistemului liniar XI-21 astfel încît să satisfacă indicele de performanţă:

$$J = \int_0^\infty (\|x\|_Q^2 + \|u\|_P^2)\,dt \qquad \text{XI-22}$$

Sistemul liniar XI-21 aproximează bine sistemul neliniar XI-2o numai dacă termenii trunchiaţi din dezvoltarea în serie sînt neglijabili faţă de termenii de ordinul întîi. Aşadar, în ipoteza perturbaţiilor mici condiţia revine la faptul că termenii neglijaţi conţin puteri de ordinul doi şi mai mari. In indicele de performanţă

se cere minimizarea funcţionalei care conţine x şi u (scalari) de gradul doi. Aşadar regulatorul este calculat astfel încît acesti termeni să aibe o influienţă cît mai mică (cea care rezultă din extremumul funcţionalei), în concluzie se poate deci afirma că există comanda care satisface un indice de performanţă patratic XI-21 şi care satisfăcător sistemul neliniar XI-20. Aşadar, ideea metodei liniar-patratice este de a calcula un regulator liniar optimal care să fie conectat la sistemul neliniar. Ne mărginim la a arăta că regulatorul acesta stabilizează sistemul neliniar XI-20. In acest scop definim o funcţie Liapunov prin

$$V(x,t)=\int_t^{\infty} (\langle x \mid Qx \rangle + \langle u \mid Pu \rangle)\, dt$$

Introducem legea de reglaj

$$u = Kx$$

Rezultă:

$$V(x,t)= \int_t^{\infty} x'(Q+K'PK)\, x\, dt$$

Calculăm derivata $\dot{V}$ şi rezultă:

$$\dot{V}(x,t) = - x'(Q' + K'PK)\, x$$

Ca anterior, presupunem V de forma

$$V = x'Rx$$

Sistemul dat XI-21 fiind constant, presupunem R=constant. Derivînd se obţine:

$$\dot{V} = \dot{x}' Rx + x'R\dot{x}$$

Ecuaţia sistemului reglat este:

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Aşadar se obţine:

$$\dot{V}(x) = x'\left[(A+BK)'R + R(A+BK)\right] x$$

Utilizînd cealaltă expresie a lui V şi considerînd că egalitatea trebue satisfăcută pentru x arbitrar, rezultă:

$$(A+BK)R' + R(A+BK)+Q - K'PK = 0$$

In această ecuaţie considerăm pe R ca funcţie de K şi impunem ca R să admită un minim prin raport cu K. Anulăm deci derivata lui R prin raport cu K. După efectuarea calculului rezultă:

$$K = - P^{-1}B'R$$

./.

Înlocuim apoi K în ecuația precedentă și obținem:

$$A'R + RA' + Q - RBp^{-1}B'R = 0$$

adică ecuația **Riccati.** În concluzie, proiectarea regulatorului prin rezolvarea ecuației Riccati este echivalentă cu stabilizarea sistemului prin metoda lui Liapunov. Esențial este aci faptul că s-a presupus că metoda întîia a lui Liapunov asigură viabilitatea sistemului în primă aproximație, care transferă proprietatea de stabilitate asupra celui neliniar. Proprietatea este globală, în sensul că există o sferă în jurul punctului (X_p, U_p), în interiorul căreia are loc această proprietate. Evident, la perturbații care scot sistemul neliniar în afara acestei sfere, atît proprietatea de stabilitate, cît și reglajul, nu mai sînt cele rezultate din calculul efectuat pe sistemul liniar.

Dacă X_p și U_p (starea și comanda programate) nu sînt constante, sistemul liniar în primă aproximație este variabil, adică apar $A(t)$ și $B(t)$. În aceste condiții există soluție pe aceeași cale, dat fiind că ecuația Riccati este valabilă și pentru sistemele liniare variabile.

XI.7. Reglajul în cazul perturbațiilor persistente

Considerăm sistemul $\Sigma : (\Sigma_1, \Sigma_2)$

$$\Sigma : \begin{cases} \Sigma_1 : \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + Bu \\ \Sigma_2 : \dot{x}_2 = A_3 x_2 \\ \quad\; y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases} \qquad \text{XI-23}$$

unde $\dim x_1 = n$, $\dim x_2 = q$, iar (A_1, B) este controlabilă (eventual numai stabilizabilă). Dacă matricea A_3 nu este asimptotic stabilă, atunci x_2 nu tinde la zero pentru $t \to \infty$ și pot avea moduri care rămîn mărginite (stabilă) sau nu rămîn mărginite (instabilă). În acest caz termenul $A_2 x_2$ capătă semnificația unei perturbații "persistente" pentru subsistemul Σ_1. Vom considera cazul cel mai defavorabil.

$$\sigma_p A_3 \subset C^+$$

Problema reglajului o formulăm în modul următor: cu legea de comandă

$$u = K_1 x_1 + K_2 x_2$$

să se obțină performanța:

$$\lim_{t \to \infty} y = 0 \quad ; \qquad \sigma_p (A_1 + BK_1) \subset C^-$$

.//.

adică Σ_1 să fie asimptotic stabil (deci Σ_1 este "intern asimptotic stabil"). O soluţie posibilă este ca x_2 să fie eliminat aditiv din Σ_1, ceeace presupune însă apariţia unor semnale nemărginite la bornele interne, din punct de vedere tehnic inadmisibile. Cu toate acestea, uneori există soluţii practicabile. Pentru rezolvarea problemei, procedeul este următorul: se introduce o matrice F astfel încît:

(1) $\dim x_1 = \dim Fx_2$

Notăm

(2) $\tilde{x} = x_1 - Fx_2$

Introducînd pe $\tilde{x}$ în ecuaţiile XI-23 se obţine:

$$\dot{\tilde{x}} = (A_1+BK_1)\tilde{x} + \left[(A_1+BK_1)F + (A_2+BK_2) - FA_3\right]x_2$$

$$y = C_1\tilde{x} + (C_1F + C_2)x_2$$

Impunem condiţia:

(3) $$\begin{cases} (A_1 + BK_1)F + A_2 + BK_2 - FA_3 = 0 \\ C_1F + C_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{XI-24}$$

Necunoscutele sînt K_1, K_2 şi F ; dacă XI-24 admite soluţie, atunci:

$$\dot{\tilde{x}} = (A_1+BK_1)\tilde{x}$$
$$y = C_1\tilde{x}$$

Deoarece (A_1,B) este cel puţin stabilizabilă, rezultă că există K_1 astfel încît

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x} = 0$$

şi problema este rezolvată. Dacă se determină independent K_1, atunci în XI-24 rămîn necunoscute numai K_2 şi F. Acesta este cazul cînd se mai introduce în performanţă şi indicele optimal:

$$\min J = \int_0^\infty (\|y\|^2 + \|k_1\tilde{x}\|^2)\,dt$$

ceeace are efect asupra regimului tranzitoriu al lui $\tilde{x}$.

Pentru rezolvarea ecuaţiilor XI-24 procedăm în modul următor: notăm coloanele lui F şi C_2 astfel:

$$|F_j\rangle \; ; \; -|C_{2j}\rangle$$

.//.

Atunci rezolvarea ecuației a doua din XI-24 revine la a rezolva q sisteme de ecuații liniare:

$$C_1 \mid F_j > = - \mid C_{2j} > \qquad j = 1, 2, \ldots, q$$

Notăm cu $\Im(C_1)$ spațiul coloanelor (liniar independente)ale lui C_1. Așadar condiția de compatibilitate pentru aceste sisteme de ecuații este:

$$\mid C_{2j} > \; \in \Im(C_1)$$

De exemplu, dacă matricea C_1 este $\nu \times m$ și rang $C_1 = \nu$, cu $\nu < n$, atunci există soluție pentru F_s. Dacă soluția nu este unică, atunci notăm cu F_s soluția generală și o introducem în prima ecuație XI-24. Se obține:

$$B(K_1F_s + K_2) = F_sA_3 - A_1F_s - A_2 = A_s$$

unde necunoscutele sînt K_1 și K_2. Cu liniile ordonate ale matricelor K_1 și K_2 formăm vectorul coloană

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ \cdots \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Utilizînd produsul tenzorial (Kronecker) se obține sistemul liniar:

$$\left[BxF_s' \;\vdots\; BxI_2 \right] \begin{bmatrix} K_1 \\ \cdots \\ K_2 \end{bmatrix} = \mid A_s >$$

unde termenul liber este o coloană formată din liniile lui A_s, iar F_s' este transpusa lui F_s. Condiția de compatibilitate este atunci:

$$\mid A_s > \; \in \; \Im([BxF_s' \vdots BxI_2])$$

In cazul în care K_1 a fost determinat anterior rămîne ca necunoscută numai K_2 așadar:

$$BK_2 = A_s - BK_1F_s$$

și coloanele termenului liber trebuie să aparțină lui $\Im(B)$, pentru existența soluției. In cazul în care perturbația asupra lui Σ_1 este persistentă, dar mărginită, atunci sînt de luat în considerare și calcule aproximative; în unele cazuri practice pseudosoluția normală poate da satisfacție.

Pentru ilustrare să considerăm exemplul

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \qquad ; \; y = x_1$$

$$\Sigma_2 : \; \dot{x}_3 = x_3$$

.//.

Rezultă matricele:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_1 = [1 \quad 0]; \quad C_2 = 0; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A_3 = 1$$

Introducem matricele

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; \quad K_1 = [\bar{K}_1 \quad \bar{K}_2]; \quad K_2 = \bar{K}_3$$

Ecuaţia a doua din XI-24 ne dă:

$$[1 \quad 0] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0$$

deci $f_1 = 0$ şi f_2 arbitrar. Din prima ecuaţie XI-24 rezultă:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{K}_1 & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{K}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0$$

de unde $f_2 = -1$ şi $-\bar{K}_2 + \bar{K}_3 + 1 = 0$ deci $\bar{K}_1$ este arbitrar.

Pentru stabilizare internă alegem $K_1 = [-2 \quad -2]$ şi $A_1 + BK_1$ este asimptotic stabilă. Rezultă deci $K_2 = -3$. Sistemul dat şi cel reglat sînt reprezentate în fig.XI.2. Înlocuind $u = K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3$ în ecuaţiile sistemului dat

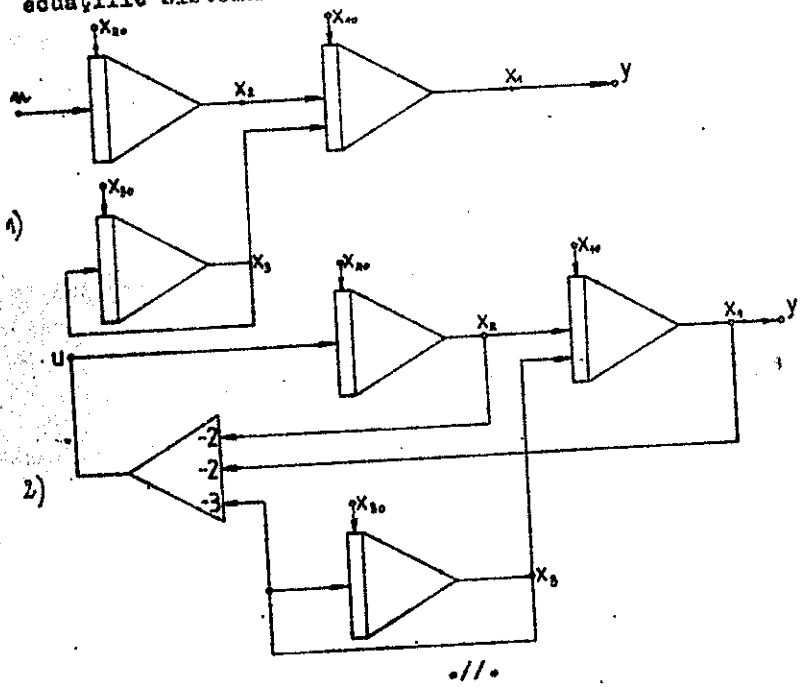


Fig.XI-2

.//.

se obţine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

Pentru a pune în evidenţă efectul asupra lui x_3 alegem condiţiile iniţiale:

$$x_{1o} = x_{2o} = o \quad şi \quad x_{3o} \neq o$$

Aşadar:

$$Dx_1 = x_2 + x_3$$

$$Dx_2 = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$Dx_3 = x_3 + x_{3o}\delta$$

Cu transformata Laplace obţinem:

$$s\mathcal{L}x_1 = \mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}x_3$$

Din cea de a doua ecuaţie explicităm pe $\mathcal{L}x_2$ şi îl înlocuim în prima. Rezultă:

$$\mathcal{L}x_1 = \frac{s-1}{s^2+2s+2}\mathcal{L}x_3$$

Dar $\mathcal{L}x_3 = \frac{x_{3o}}{s-1}$ deci: $\mathcal{L}x_1 = \frac{x_{3o}}{s^2+2s+2}$

Într-adevăr, $x_1 \longrightarrow o$ oricare ar fi x_{3o}. Observăm însă că pe bornele sumatorului şi integratoarelor apare x_3, care creşte nemărginit : $x_3 = e^t x_{3o}$.

Un exemplu care ar putea fi tratat cu metoda expusă aci este cel al "sateliţilor neperturbaţi". Un astfel de satelit se realizează în modul următor: în interiorul unei nacele se centrează o sferă metalică. La un zbor neperturbat, sfera ar trebui să se menţină în poziţia stabilită ; din cauza perturbaţiilor exterioare, nacela este deplasată de pe traectoria programată, iar sfera interioară îşi schimbă poziţia relativă faţă de nacelă. Traductoarele de poziţie sesizează această deplasare relativă.

Ca urmare sînt pornite motoraşele care centrează sfera prin deplasarea relativă a nacelei. Aşadar nacela exterioară îşi menţine traectoria conducîndu-se după poziţia sferei din interior. Această sferă însă este ecranată la perturbaţii, deoarece se află în interiorul nacelei. In ultima decadă au fost lansaţi mai mulţi sateliţi de acest gen, cu rezultate interesante privind structura cîmpului gravitaţional efecte relativiste, presiunea radiaţiilor, etc. Unul din efectele nedorite era atracţia *newtoniană* exercitată de masa nacelei, asupra

.//.

sferei interioare, mai ales din cauza repartiţiei neuniforme a masei nacelei. Pentru a compensa acest efect, nacelei i s-a imprimat o viteză suficient de mare în jurul unei axe, astfel încît neuniformităţile repartiţiei de masă să nu mai influenţeze poziţia sferei interioare. Să presupunem că avem de rezolvat problema reglajului acestui satelit. Dat fiind că unghiul de rotaţie al nacelei creşte indefinit, aceasta corespunde unui mod instabil. In aceste condiţii, regulatorul trebuie să poziţioneze centrat sfera interioară prin deplasarea nacelei exterioare, fără a modifica mişcarea de rotaţie a nacelei. Problema aceasta este de fapt o problemă de "urmărire", deoarece nacela exterioară trebuie menţinută tot timpul centrată faţă de sfera interioară, care este de fapt satelitul neperturbat.

XI-8. Principiul lui Pontriaghin

Prezentăm ideile lui Pontriaghin într-o formă care acoperă aplicaţiile practice uzuale, deşi această formă nu este cea generală. In primul rînd se ţine seamă de faptul că orice comandă este supusă la restricţii. De exemplu, bracarea suprafeţelor de comandă este limitată la anumite unghiuri maxime; puterea, acceleraţiile şi vitezele motoarelor sînt limitate, etc. Aceasta face ca u să fie ales din mulţimea comenzilor admisibile, care poate fi o mulţime deschisă sau închisă, mărginită, etc. Aşadar:

$$u \in U$$

unde U este mulţimea comenzilor admisibile.

Condiţiile la limită se dau variat, în funcţie de problema de rezolvat. De exemplu:

1. Se fixează timpul iniţial t_i şi starea iniţială $x(t_i)$.
2. Se fixează sau se lasă liber timpul final t_f.
3. Starea finală se fixează, se lasă complect liberă, sau se dă condiţionată de ecuaţii de forma

$$h_i(x_f, t_f) = 0 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,r \quad ; \quad r \leq n$$

4. Indicele de performanţă se complectează cu performanţa "în ţintă":

$$J = \int_{t_i}^{t_f} F(x,u,t)dt + S(x_f, t_f)$$

Performanţa în ţintă poate fi introdusă în integrală:

$$J = \int_{t_i}^{t_f} \left[F(x,u,t) + \frac{d}{dt} S(x,t) \right] dt - S(x_i, t_i)$$

.//.

ţiei neuniforme a masei
ei i s-a imprimat o vite-
l încît neuniformităţile
iţia sferei interioare.
glajului acestui satelit,
eşte indefinit, aceasta
ţii, regulatorul trebuie
deplasarea nacelei exte-
nacelei. Problema aceas-
arece nacela exterioară
sfera interioară, care

într-o formă care acope-
formă nu este cea gene-
că orice comandă este
prafeţelor de comandă
erea, acceleraţiile şi
ta face ca u să fie ales
e fi o mulţime deschisă

t, în funcţie de proble-

i starea iniţială $x(t_1)$.
impul final t_f.
asă complect liberă, sau

$\cdot, \gamma$; $\gamma \leq n$

plectează cu performanţa

$_f)$

rodusă în integrală:

$,t)\Big] dt - S(x_1,t_1)$

Dacă t_1 şi x_1 sînt fixate prin condiţii iniţiale, atunci $S(x_1, t_1)$ este o constantă, iar extremumul funcţionalei nu depinde de o constantă aditivă. Aşadar putem considera indicele de performanţă:

$$J = \int_{t_1}^{t_f} \left[F(x,u,t) + \langle S_x | \dot{x} \rangle + S_t \right] dt$$

$dS = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t}\frac{dt}{dt}$; $S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$; $S_t = \frac{\partial S}{\partial t}$.

Să presupunem, mai întîi, că sînt aplicabile metodele calculului variaţional (renunţăm la restricţii). Atunci cu multiplicatorii lui Lagrange şi considerînd sistemul

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$

se obţine:

$$\tilde{H} = F + \langle S_x | \dot{x} \rangle + S_t + \langle \lambda | (f - \dot{x}) \rangle$$

$F_x - \frac{d}{dt} \cdot F_{\dot{x}}^{\circ} = 0$.

Aplicarea ecuaţiilor Euler- Lagrange ne dau:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F + \langle \lambda | f \rangle) + S_{xx}\dot{x} + S_{xt} - S_{xx}\dot{x} - S_{tx} + \dot{\lambda} = 0$$

Dacă S are derivate continue de ordinul doi, termenii în S se anulează şi avem:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \; ; \; \dot{x}^{\circ} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ 0 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} \Rightarrow \text{[illegible]} \end{cases}$$

Rezultatul cel mai important al lui Pontriaghin este demonstrarea acestui procedeu şi pentru cazul cînd comenzile sînt supuse la restricţii. Comanda optimală u° se determină însă prin minimizarea lui $\tilde{H}$, dar nu prin calculul derivatei , care nu mai este aplicabil. Hamiltonianul optimal este dat de:

$$H^{\circ}(x, \lambda, t) = \min_{u \in U} H(x,u,\lambda,t) = H(x,u^{\circ}(x,\lambda,t), t)$$

** Evident, în cazul în care nu apar restricţii, problema se reduce la determinarea unui extremum prin anularea derivatei .

În ceeace priveşte condiţiile la limită, în problema lui Pontriaghin ne vom opri numai asupra condiţiilor impuse "în ţintă". Pentru aceasta introducem funcţionala

$$V(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x,\dot{x},t)dt$$

Calculăm variaţia de ordinul întîi a acestei funcţionale

$$\Delta V = V(x+h) - V(x) = \int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} F(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t)dt - \int_{t_0}^{t_1} F(x,\dot{x},t)dt.$$

///.

Aceasta poate fi rescrisă în modul următor:

$$\Delta V = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} F(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[F(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - F(x, \dot{x}, t)\right] dt$$

Din teorema mediei rezultă:

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} F(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t)\,dt \approx \left[F(x, \dot{x}, t)\right]_{t_1} \delta t_1$$

Cea de a doua integrală o exprimăm prin primul termenl al seriei Taylor:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[F(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - F(x, \dot{x}, t)\right] dt \approx \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x h + F_{\dot{x}} \dot{h}\right] dt$$

Integrăm prin părţi termenul $\dot{h}$ şi rezultă:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{x}} \dot{h}\,dt = \left[F_{\dot{x}} h\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} h\,dt$$

Dacă x este o extremală, satisface ecuaţia lui Euler deci obţinem:

$$\Delta V \approx \left[F_{\dot{x}} h\right]_{t_0}^{t_1} + \left[F\right]_{t_1} \delta t_1$$

Dacă punctul iniţial este fixat, atunci $h(t_0)=0$. Punctul final fiind liber avem

$$\delta x_1 = h(t_1) + \dot{x}(t_1)\,\delta t_1.$$

(se recomandă ca exerciţiu).

La limită reţinem din ΔV numai variaţia de ordinul întîi şi rezultă:

$$\delta V = \left[F_{\dot{x}}\right]_{t_1} \left[\delta x_1 - \dot{x}(t_1)\delta t_1\right] + \left[F\right]_{t_1} \delta t_1$$

Condiţia necesară de extremum este :

$$\delta V = 0$$

prin urmare :

$$\left[F_{\dot{x}}\right]_{t_0} \delta x_0 + \left[F - \langle \dot{x} | F_{\dot{x}} \rangle\right]_{t_1} \delta t_1 = 0$$

.//.

Repetînd acelaşi procedeu pentru punctul final fixat şi punctul iniţial liber se obţine

$$\left[F_{\dot x}\right]_{t_0}\delta t_0 + \left[F - \langle \dot x | F_{\dot x} \rangle\right]_{t_0}\delta t_0 = 0$$

Formulele au fost scrise pentru a putea trece uşor la cazul vectorial:

$$x = | x_1, \dots, x_n \rangle$$

$$F_{\dot x} = | F_{\dot x_1}, \dots, F_{\dot x_n} \rangle$$

Aşadar formula pentru condiţii finale libere devine

$$\langle \delta x | F_{\dot x} \rangle_{t_1} + \left[F - \langle \dot x | F_{\dot x} \rangle\right]_{t_1}\delta t_1 = 0$$

Pentru aplicarea principiului lui Pontriaghin scriem această formulă astfel:

$$\langle H_{\dot x} | dx \rangle_{t_f} + \left[(H - \langle H_{\dot x} | \dot x \rangle) dt\right]_{t_f} = 0$$

Explicitînd pe H se obţine

$$\langle (S_x - \lambda) | dx \rangle_{t_f} + \left[(F + \langle \lambda | f \rangle + S_t) dt\right]_{t_f} = 0$$

Deoarece în această expresie apar extre[illegible] le putem introduce pe H^0 şi rezultă:

$$\langle (S_x - \lambda) | dx \rangle_{t_f} + \left[(H^0 + S_t) dt\right]_{t_f} = 0$$

Acestea sînt condiţiile la limită cu timpul iniţial fixat, în problema lui Pontriaghin. Deşi nu este forma cea mai generală, acoperă un domeniu vast de aplicaţii practice. Pentru ilustrare, considerăm următorul exemplu: un avion se mişcă în plan vertical şi notăm:

x_1 coordonata pe orizontală

x_2 viteza pe orizontală

x_3 coordonata pe verticală

x_4 viteza pe verticală

Se pune problema realizării altitudinii; indicele de performanţă este atunci

$J = x_3(t_f) = \min!$ $J = X_3(t_f) = \min.$

Condiţiile la limită în această problemă devin:

$$\left[(S_{x_1} - \lambda_1)dx_1 + (S_{x_2} - \lambda_2)dx_2 + (S_{x_3} - \lambda_3)dx_3 + (S_{x_4} - \lambda_4)dx_4\right]_{t_f} = 0$$

./.

Ţinînd seamă de indicele de performanţă rezultă

$$\left[-\lambda_1 dx_1 - \lambda_2 dx_2 - (1+\lambda_3) dx_3 - \lambda_4 dx_4\right]_{t_f} = 0$$

Prin urmare:

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0 \quad ; \quad \lambda_3(t_f) = -1$$

Să presupunem acum că se cere ca plafonul maxim atins să aibă loc la o coordonată orizontală dată $x_1(t_f)$. Condiţiile adiţionale devin:

$$\lambda_2(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0 \quad ; \quad \lambda_3(t_f) = -1$$

Să presupunem acum că în plus se cere ca avionul să rămînă în continuare la altitudinea $x_1(t_f)$. Atunci viteza pe verticală în t_f se anulează şi condiţiile adiţionale devin:

$$\lambda_2(t_f) = 0 \quad ; \quad \lambda_3(t_f) = -1$$

Metoda lui Pontriaghin asigură condiţiile necesare de extremum, dar nu şi suficiente, astfel încît într-o problemă dată nu este garantată nici existenţa şi nici unicitatea comenzii optimale căutate. Algoritmul recomandat este următorul:

1. Se dă sistemul

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ u \in U \end{cases}$$

comanda admisibilă

şi indicele de performanţă:

$$J = \int_{t_i}^{t_f} F(x,u,t)\,dt$$

2. Se formează funcţia de stare a lui Pontriaghin

$$H = F + \langle \lambda | f \rangle$$

3. Se determină comanda optimală şi H optimal prin minimizarea lui H:

$$H^\circ(x,\lambda,t) = \min_{u \in U} H(x,u,\lambda,t) = H(x,u^\circ,\lambda,t)$$

4. Se rezolvă sistemul diferenţial de 2 n ecuaţii:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H^\circ}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H^\circ}{\partial x} \end{cases}$$

.//.

cu condiţiile la limită date. Pentru t_f liber condiţiile adiţionale devin

$$\langle (\lambda_x - \lambda) \mid dx \rangle_{t_f} + [(H^0 + \lambda_t)dt]_{t_f} = 0$$

5) Se introduce soluţia x şi λ în expresia lui u^0, determinîndu-se astfel comanda optimală.

Deoarece problemele practice necesită calcul numeric, pentru aplicarea metodei lui Pontriaghin au fost elaborate diverse algoritme şi programe pentru determinarea comenzii optimale în probleme tehnice, economice şi în alte domenii.

Pentru ilustrarea aplicării, considerăm din nou dublul integrator:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

Cu comanda admisibilă $|u| \leq 1$ se cere aducerea sistemului în zero în timp minim. Atunci indicele de performanţă este

$$F(x,u,t) = 1 \qquad \min \gamma = \int_{t_i}^{t_f} dt .$$

adică rezultă timpul minim necesar pentru aducerea sistemului în zero, din condiţiile iniţiale x_{1o} şi x_{2o}. Putem alege $t_o = 0$, deoarece sistemul este liniar şi constant, astfel că din orice punct iniţial t_i ales, soluţia este aceeaşi.

Construim funcţia de stare a lui Pontriaghin:

$$H(x,\lambda,u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

Dacă $\lambda_2 \neq 0$ atunci u care minimizează pe H este

$$u^0(x,\lambda) = -\operatorname{sgn}\lambda_2$$

Rezultă sistemul de 2n ecuaţii:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = \dfrac{\partial H^0}{\partial \lambda_1} \\ \dot{x}_2 = -\operatorname{sgn}\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_1 = 0 \qquad \lambda_1 = -\dfrac{\partial H^0}{\partial x_1} \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases}$$

Condiţiile la limită sînt:

$$x_1(0) = x_{1o};\ x_2(0) = x_{2o};\ x_1(t_f) = 0;\ x_2(t_f) = 0$$

.//.

unde t_f este necunoscut. Rezolvînd ecuaţiile se obţine:

$$\lambda_1 = a$$
$$\lambda_2 = b-at$$
$$x_2 = x_{2o} + t\,\mathrm{sgn}\,(b-at)$$
$$x_1 = x_{1o} + x_{2o}t + \frac{t^2}{2}\,\mathrm{sgn}(b-at)$$

unde a şi b sînt constante. Ultimele două ecuaţii reprezintă parametric o familie de parabole pentru sgn $\lambda_2=1$ şi o altă familie de parabole pentru sgn $\lambda_2=-1$. In fig. XI-2 sînt reprezentate astfel de parabole în planul x_1,x_2. Săgeţile indică parcurgerea în sensul lui t crescător. Liniile pline sînt parcurse de comanda u=1, iar cele punctate de comanda u=-1. Pentru aducerea sistemului în origine (o,o) comanda finală se află fie pe arcul de parabolă Ao, fie pe arcul BO. Dacă punctul iniţial este în P, atunci sub comanda u=-1, sistemul se duce în punctul C unde comanda comută la u=1, după care sistemul parcurge arcul CO ajungînd în (o,o). Pe această figură poate fi reprezentată şi soluţia următoarei probleme: un vehicul pleacă din (o,c) şi trebue să ajungă în (L,o) în timp minim, dar cu acceleraţia de demarare sau frînare $|u| \leq 1$. Atunci el va parcurge arcul OD cu comanda u=1, apoi arcul DL cu comanda u=-1. In L se va opri, deoarece viteza (x_2) este zero.

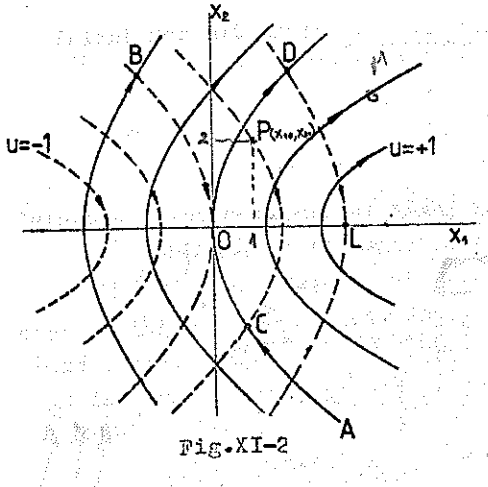


Fig.XI-2

După calculul efectiv al comenzii optimale şi a răspunsului dublului integrator, cu condiţiile iniţiale $x_{1o}=1$ şi $x_{2o}=2$ obţinem următorul rezultat:

t	x_2	x_1	u
0	2	1	-1
2	0	3	-1
$t_c=2+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	3/2	+1
$t_f=2(1+\sqrt{3})$	0	0	0

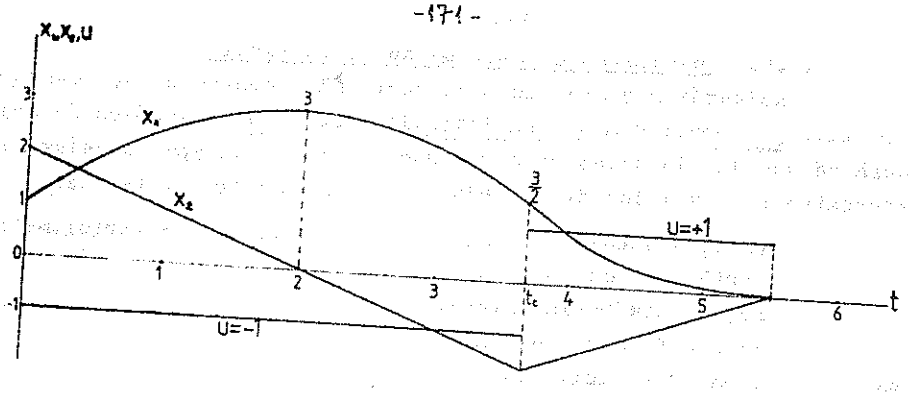


Fig. XI.3

Pentru calculul timpului final se deduc formulele:

$$t_f(x_{1o},x_{2o})=\begin{cases} x_{2o}+\sqrt{4x_{1o}+2x_{2o}^2} & \text{pentru } x_{1o}>-\frac{1}{2}\,x_{2o}\,|x_{2o}| \\ -x_{2o}+\sqrt{-4x_{1o}+2x_{2o}^2} & \text{pentru } x_{1o}\leq-\frac{1}{2}\,x_{2o}\,|x_{2o}| \end{cases}$$

Ca exerciţiu, propunem să se calculeze comanda de tip Heaviside, cu aceeaş restricţie $|u|\leq 1$, cu pasul $\tau=0{,}25$ şi cu timpul final $t_f=6$, la care dublul integrator să ajungă în zero (cu procedeul dat în cap.IX). Să se compare apoi rezultatul obţinut, cu cel dat de metoda lui Pontriaghin (din fig.XI-3).

XI.9. Minimizarea consumului de combustibil

Considerăm mişcarea în plan vertical a centrului de masă m al avionului, presupunînd mişcarea laterală stabilizată. In plus se consideră că unghiul la traectorie γ este mic şi că nu apar acceleraţii perturbatoare pe verticală. Introducem următoarele variabile:

E energia specifică (raportată la unitatea de forţă), metri.
T forţă de tracţiune, N
R rezistenţa la înaintare, N
V viteza faţă de aer, m/s
m masa avionului, kg.
g acceleraţia gravitaţiei, m/s^2
h altitudinea avionului, m
γ unghiul de traectorie, rad.
x coordonata centrului de masă, pe traectorie rectilină.
u cosinusul unghiului dintre cap şi traectorie
f debitul de combustibil kg/s.

* Singura variabilă care are componentă laterală este u; considerăm

$$0 \leq u \leq 1$$

Pentru $u < 1$ avem $\dot{x} \neq V + V_v$, fără a afecta celelalte stări. Forţa de tracţiune este şi ea supusă la restricţii:

$$T_{min} \leq T \leq T_{max}.$$

In problema minimizării costurilor directe de exploatare nu intervine numai costul combustibilului, ci şi costul timpului de aşteptare. Calculele şi controlul avionului pe traectorie se efectuiază în 4D (coordonatele plus timpul). Echipamentul actual de avionică permite calcule de optimizare cu timp iniţial fixat t_i şi cu timp final liber t_f. Aici poate interveni însă timpul de aşteptare la aterizare, care poate greva într-o măsură importantă şi consumul de combustibil. Dacă se fixează t_f şi se lasă liber t_i, atunci intervine timpul de aşteptare la decolare, ceeace iarăşi măreşte costurile directe. Aşadar, un parametru important este costul timpului de aşteptare. O soluţie bună este fixarea timpului iniţial t_i şi aterizarea imediată, chiar înainte de programul de sosire. Asupra acestor probleme au fost efectuate numeroase studii. In exemplul prezentat aci considerăm t_f fixat; în ipoteza variaţiilor mici, considerăm următorul model al mişcării în plan vertical:

.//.

$$\dot{E} = (T-R)\frac{V}{mg}$$
$$\dot{h} = V\gamma \quad (\gamma mic)$$
$$\dot{f} = (V+V_v)u \qquad \text{XI-25}$$
$$\dot{m} = -f$$

Indicele de performanţă este dat de minimizarea consumului de combustibil:

$$\min J = \int_{t_i}^{t_f} C_f f dt \qquad \text{Kg/s}$$

unde, C_f este costul pe kg. de combustibil. Formăm funcţia de stare a lui Pontriaghin: lei/kg cb.

$$H = C_t f + \lambda_E (T-R)\frac{V}{mg} + \lambda_h V\gamma + \lambda_x (V+V_v)u - \lambda_m f$$

Traectoria optimală este dată de minimul lui H, prin raport cu comenzile admisibile T, γ şi u. Considerăm că f, R şi V_v nu sînt funcţii explicite de timp; aceasta implică, de exemplu, că viteza vîntului variază lent în lungul traectoriei, această variaţie fiind chiar neglijată. In acest caz, minimul lui H rezultă pentru H constant,

$$\min_{T,\gamma,u} H = H_o = \text{constant},$$

Putem alege această constantă în legătură cu costul timpului C_t (lei pe secundă):

$$C_t = -H_o$$

In acest caz minimul este zero pe traectoria optimală:

$$H = (C_f - \lambda_m) f + C_t + \lambda_E (T-R)\frac{V}{mg} + \lambda_h V\gamma + \lambda_x (V+V_v)u \qquad \text{XI-26}$$

Problema poate fi formulată acum astfel: să se optimizeze costurile directe cu parametrii C_f şi C_t, ca o problemă bilocală. Vom particulariza problema pentru zborul de croazieră, urcare şi coborîre.

Pentru zborul de croazieră considerăm starea zero în XI-25 ca stare de referinţă, adică:

$$T = R \; ; \quad \gamma = 0$$

Un studiu mai de detaliu arată că în acest caz rezultă E, h, λ_E şi λ_x constante.

.//.

Pentru comenzile încrementale E,h şi u, aplicarea principiului lui Pontriaghin ne dă:

$$\lambda_x = -\min_{E,h,u} \left[\frac{(C_f - \lambda_m) f + C_t}{(V+V_v)u} \right]_{T=R}$$

In această expresie se observă că $\lambda_x = 0$ are loc pentru

$$C_t = -(C_f - \lambda_m) f$$

unde f (consumul specific de combustibil) poate fi minimizat prin micşorarea vitezei pe traectorie pînă la minimul admisibil (croazieră de viteză minimă). Pe de altă parte, pentru $\lambda_x > 0$ şi $u \neq 1$ consumul nu este minim, dar se poate acţiona asupra lui C_t, ceeace poate compensa costul total. Aşadar o traectorie optimală pentru croazieră are loc cînd

1) viteza de croazieră este minimizată astfel încît $\lambda_x = 0$

2) reducerea vitezei odată cu realizarea unui timp de aşteptare mai mic decît cel critic.

Pentru urcare şi coborîre se minimizează XI-26 menţinînd unghiul la traectorie γ în limitele pentru care se obţine $\lambda_h = 0$. Astfel, pentru urcare se obţine:

$$\lambda_E = -\min_{V, R < T \leq T_{max}, u} \left[\frac{(C_f - \lambda_m) f + C_t + \lambda_x (V+V_v) u}{(T-R)\frac{V}{mg}} \right]_E$$

Pentru coborîre se obţine:

$$\lambda_E = \max_{V, T_{min} \leq T < R, u} \left[\frac{(C_f - \lambda_m) f + C_t + \lambda_x (V+V_v) u}{(T-R)\frac{V}{mg}} \right]_E$$

Aci parametrii importanţi sînt viteza de urcare/coborîre şi comanda tracţiunii.

Pentru cazul cînd $u \neq 1$ se impune condiţia $\lambda_x = 0$, pentru a păstra minimum, ca şi în cazul croazierei. Aşadar modelul nu precizează punctul în care traectoria trece dela croazieră la pantă. Combinarea celor trei situaţii, urcare, croazieră, coborîre, arată că dacă timpul de sosire este fixat, minimizarea consumului cere optimizarea traectoriei pe toate cele trei situaţii şi eventual alegerea momentului de decolare. Schimbarea momentului sosirii în timpul zborului necesită modificarea altitudinii şi a vitezei de zbor, deci a traectoriei optimale Aceste concluzii sînt, evident, intuitive, dar formularea lor cu principiul lui Pontriaghin permite calculul efectiv al traectoriei

.//.

optimale. Astfel de programe sînt utilizate în prezent în practica exploatării, iar rezultatele obţinute au condus la însemnate economii de combustibil, pînă la peste 20% faţă de consumul anterior optimizării. In cea mai mare măsură la acest rezultat contribuie în special echipamentul modern de avionică.

Cap. XII. Reprezentarea în timp discret

XII.1. Sisteme liniare, constante

In ultimii ani echipamentul de avionică a trecut masiv spre calcul numeric; de altfel a primit şi o denumire deja consacrată, de "avionică numerică".

In prezent există avioane în exploatare, care dispun de o avionică complect digitalizată şi de reţea de microprocesoare la bord. Prelucrarea numerică necesită o reprezentare în timp discret; normalizînd scara timpului şi luînd un pas egal pe toată scara de timp, putem considera:

$$t \in N$$

Ecuaţiile care descriu dinamica sistemului le considerăm în forma

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad \text{XII-1}$$

unde dim x=n, dim u=m, dim y= p, iar matricele A,B,C de dimensiuni $n.n$, $n.m$ şi $p.n$, respective, aşa cum am considerat şi la sistemele în timp continuu. Soluţia în x se determină prin recurenţă:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(o)+Bu(o) \\ x(2) &= Ax(1)+Bu(1) = A^2x(o)+ABu(o)+Bu(1) \\ x(3) &= Ax(2)+Bu(2) = A^3x(o)+A^2Bu(o)+ABu(1)+Bu(2) \end{aligned}$$

$$x(k) = A^k x(o) + \sum_{i=1}^{k} A^{k-i} Bu(i-1) \qquad \text{XII-2}$$

Termenul $A^k x(o)$ reprezintă dinamica liberă a sistemului, iar cel de al doilea termen reprezintă răspunsul la comenzi. Prin utilizarea proprietăţii de operator de translaţie a distribuţiei lui Dirac, se obţine o analogie formală perfectă cu sistemele în timp continuu. Intr-adevăr avem

$$x(t) * \delta(t+1) = x(t+1)$$

Notăm $\delta(t+1) = \delta_{-1}$ (deoarece suportul este $t = -1$). Atunci ecuaţia XII-1 devine:

$$(\delta_{-1} I - \delta A) * x = Bu(t) \qquad \text{XII - 3}$$

Comanda fiind dată în timp discret o considerăm în forma

$$u(t) = \sum_k \beta u_k \delta_k = \beta \sum_k u_k \delta_k \qquad \text{XII- 4}$$

.//.

unde u_k sînt vectori constanţi, reali.

Din XII-3 matricea de transfer apare imediat:

$$x=(\delta_{-1} I-\delta A)^{-1}B * u$$

$$y=C(\delta_{-1} I-\delta A)^{-1}B * u$$

adică $y=G * u$ unde $G=C(\delta_{-1} I-\delta A)^{-1}B$ XII-5

Indicele lui δ poate fi considerat ca "gradul" operatorului de translaţie, deoarece

$$\delta_i * \delta_j = \delta_{i+j} \quad ; \quad i,j \in Z$$

Aşadar formal lucrurile stau perfect analog cu sistemele continue, unde gradul exprima derivata. Prin urmare, toate cele spuse cu privire la controlabilitate, observabilitate şi reglaj rămîn formal în vigoare.

Pentru studiul stabilităţii observăm următoarele; dinamica liberă este

$$x_k = A^k x_0$$

de unde

$$\| x_k \| \leq \| A^k \| \cdot \| x_0 \|$$

Spunem că sistemul este asimptotic stabil dacă

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0 \qquad \forall x_0 \in R^n$$

Sistemul este stabil dacă x_k rămîne mărginit şi instabil cînd x_k nu este mărginit. Condiţia de stabilitate asimptotică revine la

$$\lim_{k \to \infty} \| A^k \| = 0$$

deoarece x_0 este o constantă arbitrară. Ţinînd seama de legătura dintre normă şi raza spectrală, condiţia de stabilitate asimptotică rezultă imediat

$$|\lambda_i| < 1 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

unde $\lambda_i \in \sigma_p A$. Dacă blocurile Jordan ale matricei A sînt numai de ordinul întîi, atunci valorile proprii aflate chiar pe cercul de rază unitate fac sistemul stabil (dar nu asimptotic). Dacă există blocuri Jordan de ordin mai mare ca unu, corespunzătoare unei valori proprii aflate pe cercul de rază unitate, sau dacă există măcar o valoare proprie în afara acestui cerc, atunci sistemul este instabil.-

.//.

Trecerea dela sistemele în timp continuu, la sistemele în timp discret rezultă din capitolul IX, formulele IX-2o, cu comanda de tip Dirac XII-4.

Repetăm aci formula de recurenţă:

$$x(kT) = e^{AT}x_{k-1} + Bu_k$$

cu observaţia că în formula de mai sus prima comandă este u_1 (u_o=o) şi că x_k este valoarea limită la dreapta în punctul kT. In unele aplicaţii practice nu se recurge însă la matricea e^{AT}, ci se aproximează derivata printr-o formulă cu diferenţe. De altfel, la calculul numeric se recurge întotdeauna la formule cu diferenţe, pentru integrare.

Reamintim că trecerea dela timp continuu la timp discret necesită organe de eşantionare şi restabilire, descrise în cap VII, paragraful VII-4.

XII-2. Transformata z.

In aplicaţii este uneori utilă transformata Laplace; ţinînd seamă de faptul că

$$\mathcal{L}\delta_{-1} = e^{s}$$

formula XII-3 devine:

$$(e^{s}I - A)\mathcal{L}x = B\mathcal{L}u$$

Se introduce notaţia: $z = e^{s}$ şi rezultă

$$(zI - A)\mathcal{L}x = B\mathcal{L}u$$

Aceasta este, transformata „z". Pentru calcule sînt utile următoarele transformate z :

1. Treapta Heaviside eşantionată

$$\mathcal{L}h = \sum_{o}^{\infty}\delta_k$$

Rezultă imediat

$$\mathcal{L}h = \sum_{o}^{\infty}\frac{1}{z^k} = \frac{z}{z-1} \quad ; \quad |z| > 1$$

2. Semnalul "rampă"

$$\mathcal{L}\sum_{o}^{\infty}k\delta_k = \frac{z}{(z-1)^2}$$

3. Semnalul "parabolă"

$$\mathcal{L}\sum_{o}^{\infty}k^2\delta_k = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

.//.

4. Exponențiala

$$\mathcal{Z}\,\lambda^k \delta_k = \frac{z}{z-\lambda}$$

5. Sinusoida

$$\mathcal{Z} \sum_0^\infty \delta_k (\sin k\omega) = \frac{z \sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

$$\mathcal{Z} \sum_0^\infty \delta_k (\cos k\omega) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

Reciprocitatea transformatei $\mathcal{Z}$ rezultă în modul următor: fie $A(z)$ olomorfă pentru $|z| > \rho$. Prin dezvoltare în serie Laurent avem:

$$A(z) = \sum_0^\infty \frac{a_k}{z^k} \quad ; \quad k \in N$$

Prin urmare poate fi utilizată formula clasică:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma A(z)\, z^{k-1}\, dz$$

unde Γ este un cerc de rază $\rho' > \rho$ parcurs în sens pozitiv.

Teorema valorii inițiale este directă:

$$\lim_{z \to \infty} \mathcal{Z} A = a_0$$

adică primul termen din șirul a_k, presupus finit.

Teorema valorii finale este condiționată de limita lui a_k pentru $k \to \infty$. Dacă această limită există atunci $\mathcal{Z} A$ are o rază de convergență mai mică sau egală cu unu și avem:

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ |z| \geq 1 \\ z \to 1}} \left(\frac{z-1}{z} \mathcal{Z} A \right) = \lim a_k$$

De exemplu, pentru exponențială avem:

$$\lim_{\substack{|z| \geq 1 \\ z \to 1}} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-\lambda} = \lim_{\substack{|z| \geq 1 \\ z \to 1}} \frac{z-1}{z-\lambda} = 0 \quad ; \quad 0 < \lambda < 1$$

.//.

XII-3. Un exemplu de reglaj în timp discret.

Se dă sistemul

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t+1) = Cx(t+1) \end{cases} \qquad t \in N \qquad \text{XII-7}$$

şi legea de răspuns la comenzi

$$u = h + Kx$$

Se cere să se determine matricea K a regulatorului, pentru o performanţă dată. Presupunem (A,B) controlabilă, (C,A) observabilă şi rang C=p. Introducem "diferenţa la dreapta"

$$\Delta x = x(t+1) - x(t)$$

şi "diferenţa la stânga"

$$\nabla x = x(t) - x(t-1)$$

Rescriem XII-7 pentru un pas anterior:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t-1) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad \text{XII-8}$$

Scăzînd XII-8 din XII-7 se obţine:

$$\begin{aligned} \Delta x &= A\nabla x + B\nabla u \\ \Delta y &= C\Delta x \end{aligned} \qquad \text{XII-9}$$

Acesta este sistemul "incremental" asociat lui XII-7; această reprezentare prezintă unele avantagii în calcule. De exemplu să presupunem că programul dat este $\bar{y}$ =constant. Atunci eroarea de reglaj (în regim staţionar) este dată de:

$$e(t) = \bar{y} - y(t)$$

Rescriind această ecuaţie la pasul următor şi scăzînd rezultă:

$$e(t+1) = e(t) - \Delta y = e(t) - C\Delta x$$

Definim "sistemul extins" cu starea

$$v(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \nabla x \end{bmatrix} \quad ; \quad v(t+1) = \begin{bmatrix} e(t+1) \\ \Delta x \end{bmatrix}$$

Introducînd în ecuaţiile precedente rezultă:

$$\begin{aligned} v(t+1) &= F\,v(t) + G\nabla u \\ e(t) &= H\,v(t) \end{aligned} \qquad \text{XII-10}$$

unde:

$$F = \begin{bmatrix} I_p & \vdots & -CA \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & A \end{bmatrix} \quad ; \quad G = \begin{bmatrix} -CB \\ \cdots \\ B \end{bmatrix} \quad ; \quad H = \begin{bmatrix} I_p & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

.//.

Introducem legea de reglaj

$$\nabla u = [K_1 \vdots K_2]\begin{bmatrix} e \\ \cdots \\ \nabla x \end{bmatrix} = Kv = K_1 e + K_2 \nabla x \quad ; \quad K = [K_1 \vdots K_2]$$

Matricea K se determină conform cu performanţa specificată; ecuaţiile XII-1o devin:

$$\begin{cases} v(t+1) = F+GK)v(t) \\ e = Hv \end{cases} \qquad \text{sau}$$

$$\begin{bmatrix} e(t+1) \\ \Delta x \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_p & -CA \\ \hline 0 & A \end{array}\right]\begin{bmatrix} e(t) \\ \cdots \\ \nabla x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -CB \\ \cdots \\ B \end{bmatrix}[K_1 \vdots K_2]\begin{bmatrix} e(t) \\ \cdots \\ \nabla x \end{bmatrix}$$

Aşadar:

$$F+GK = \left[\begin{array}{c|c} I_p - CBK_1 & -C(A+BK_2) \\ \hline BK_1 & A+BK_2 \end{array}\right]$$

In această matrice A,B,C, sînt date, iar K_1 şi K_2 se determină astfel încît F+GK să fie asimptotic stabilă. In acest caz $v \to 0$ cînd $t \to \infty$ şi deci $e \to 0$ adică [illegible] finală este zero.

Pentru proiectarea unui regulator optimal se poate alege un indice de performanţă:

$$\min J = \lim_{N \to \infty} \sum_{t=0}^{N-1} \left[v(t+1)' \bar{Q} v(t+1) + (\nabla u)' P \nabla u \right]$$

unde $\bar{Q} = C'QC$, $Q \geq 0$, $P \geq 0$ [illegible] se poate [illegible] că matricea regulatorului optimal este

$$K = (P + C'RC)^{-1} C'RC$$

unde R este soluţia ecuaţiei [illegible]:

$$R = F'RF - F'RC(P + C'RC)^{-1} C'RC + \bar{Q}$$

Acesta este de [illegible] analog discret al regulatorului optimal PI.

Dacă există soluţie, se poate calcula regulatorul conectat la ieşire, în care cea matricele necunoscute sînt K_1 şi matricea de ieşire.

In prezent se dezvoltă metodele hibride, în care sistemele continue sînt conectate la regulatoare discrete (calculele sînt efectuate cu microprocesoare), iar comenzile sînt restabilite. Schema conţine deci convertoare AD şi DA conectate cu microprocesoare.

./.

Cap. XIII. Sisteme aleatoare.

XIII-1. Preliminarii.

In acest paragraf enumerăm câteva noţiuni necesare în aplicaţii.

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete se scrie sub forma unui tablou cu două linii. Prima linie conţine toate valorile pe care le poate lua variabila aleatoare, iar cea de a doua linie probabilităţile de realizare a acestor valori:

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots x_n \\ p_1 & p_2 \dots p_n \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad \xi : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$$

Presupunem că ξ ia una (şi numai una) din toate valorile din tabel; evenimentul care constă în aceea că variabila aleatoare ia una din toate valorile posibile este evenimentul sigur, deci avem (sistem complect de evenimente):

$$\sum_{1}^{n} p_i = 1$$

Operaţiile cu variabile aleatoare se definesc după cum urmează:

Adunarea a două variabile aleatoare este:

$$\textcircled{1} \quad \xi + \eta : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}; \quad \xi : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=1,2,\dots,n} ; \quad \eta : \begin{pmatrix} y_j \\ p_j \end{pmatrix}_{j=1,2,\dots,m}$$

unde

$$p_{ij} = P(\xi = x_i ; \eta = y_j)$$

Cu alte cuvinte p_{ij} este probabilitatea ca simultan $\xi = x_i$ şi $\eta = y_j$. Deoarece cele nm evenimente formează un sistem complect de evenimente rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

1. Produsul unei variabile aleatoare ξ cu o constantă $a \in \mathbb{R}$ are repartiţia

$$\textcircled{2} \quad a\xi : \begin{pmatrix} ax_i \\ p_i \end{pmatrix}$$

Produsul a două variabile aleatoare η şi ξ este, prin definiţie:

$$\textcircled{3} \quad \xi\eta : \begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}$$

Variabilele ξ şi η sînt independente dacă pentru orice i şi

.//.

și evenimentele $(\xi = x_i)$ și $(\eta = y_j)$ sînt independente. În acest caz:

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j) \quad \text{sau}$$

$$\lambda_{ij} = \lambda_i \lambda_j$$

Prin extensie, puterea de ordinul K a variabilei aleatoare are repartiția

(4) $$\xi^K : \begin{pmatrix} x_i^K \\ p_i \end{pmatrix}$$

Un exemplu de repartiție pentru o variabilă aleatoare discretă este repartiția Poisson:

$$P(k,\lambda) = \frac{\lambda}{k!} e^{-\lambda} \; ; \; k \in \mathbb{N}$$

sau

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m & \dots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{4} e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}$$

Această repartiție este frecvent utilizată pentru a descrie sosirile într-o linie de așteptare (de exemplu sosirile pentru aterisare la un aeroport cu trafic intens).

Se numește "moment de ordinul K" al unei variabile aleatoare ξ:

(1) $$M(\xi^k) = \sum x_i^k \lambda_i$$

(2).- Momentul de ordinul întîi al unei variabile aleatoare se numește "media" variabilei aleatoare ξ și se notează $M(\xi)$ sau $E(\xi)$:

$$M(\xi) = \sum x_i \lambda_i$$

Media are proprietăți utile în aplicații, ca de exemplu:

(3) $$M(a) = a$$

Interpretarea este următoarea: variabila aleatoare considerată este

$$\xi : \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

adică apariția unei constante a cu probabilitate 1 (eveniment sigur).

Deoarece $M(\xi)$ este o constantă avem și

(5) $$M(M(\xi)) = M(\xi)$$

Media variabilei aleatoare $a\xi$ este:

(c) $$M(a\xi) = \sum a x_i \lambda_i = a \sum x_i \lambda_i = aM(\xi)$$

Media variabilei aleatoare $\xi + \eta$ este (exercițiu):

(d) $$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$$

Dacă ξ și η sînt variabile aleatoare independente atunci

(e) $$M(\xi\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$$

Ca exemplu pentru calculul mediei să luăm repartiția Poisson. Avem

$$\sum_0^\infty m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_1^\infty \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

* Se numește "variabilă aleatoare centrată" o variabilă aleatoare cu media zero. Avem deci:

$$\mathring{\xi} = \xi - M(\xi)$$

Într-adevăr:

$$M(\mathring{\xi}) = M[\xi - M(\xi)] = M(\xi) - M(\xi) = 0$$

3.- Momentul de ordinul doi al variabilei aleatoare centrate se numește "dispersie":

$$D^2(\xi) = M(\mathring{\xi}^2) = M[(\xi - M(\xi))^2]$$

Avem succesiv:

$$M[(\xi - M(\xi))^2] = M(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + M^2(\xi)) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$$

Dispersia are unele proprietăți utile în aplicații, ca de exemplu: dispersia unei constante $a \in R$ este zero, deoarece

(a) $$D^2(a) = M(a^2) - M^2(a) = a^2 - a^2 = 0$$

Dispersia variabilei aleatoare $a\xi$ este:

(b) $$D^2(a\xi) = M(a^2\xi^2) - M^2(a\xi) = a^2(M(\xi^2) - M^2(\xi)) = a^2 D^2(\xi)$$

Pentru două variabile aleatoare ξ și η independente avem (exercițiu):

(c) $$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta)$$

Consecință: (d) $$D^2(a + \xi) = D^2(\xi)$$

Ca exemplu, să calculăm dispersia pentru repartiția Poisson; avem

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = M(\xi^2) - \lambda^2$$

$$M(\xi^2) = e^{-\lambda} \sum_0^\infty m^2 \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \sum_0^\infty [m(m-1) + m] \frac{\lambda^m}{m!} =$$

$$= e^{-\lambda} \left[\lambda^2 \sum_2^\infty \frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!} + \lambda \sum_1^\infty \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \right] = e^{-\lambda} [\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}] = \lambda^2 + \lambda$$

În concluzie: $$D(\xi) = \lambda$$

Se numește "abatere medie patratică" $$\sigma(\xi) = \sqrt{D^2(\xi)}$$

.//.

Pentru dispersie mai utilizăm și notația σ_ξ^2

Un exemplu de aplicare în măsurători este următorul: în aceleași condiții efectuăm n serii de măsurători iar rezultatul măsurărilor îl calculăm cu media aritmetică a celor n măsurători. Considerăm variabila aleatoare

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n)$$

unde $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ sînt variabile aleatoare independente, cu aceeași repartiție

$$\begin{pmatrix} y_i \\ p_i' \end{pmatrix} \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$

Media pentru fiecare este:

$$M(\eta_k) = \sum_1^m y_i p_i' = a$$

Dispersia pentru fiecare este:

$$D^2(\eta_k) = \sum_1^m (y_i - a)^2 p_i' = \sigma^2$$

Pentru variabila aleatoare $\tilde{\eta}$ obținem:

$$M(\tilde{\eta}) = \frac{1}{n}\sum_1^n M(\eta_k) = \frac{na}{n} = a$$

Prin urmare, după cum era de așteptat, media se păstrează aceeași. Avem însă

$$D^2(\tilde{\eta}) = \frac{1}{n^2}\sum_1^n D^2(\eta_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \quad ; \quad D(\tilde{\eta}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Așadar dispersia rezultă de n ori mai mică, prin repetarea unei măsurători de n ori.

4.- Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare este definită ca probabilitatea evenimentului $(\xi < x)$, $x \in R$, așadar:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

Se numește "densitate de probabilitate" derivata în sens distribuții a funcției de repartiție:

$$f(x) = DF(x)$$

* Aceste definiții se referă atît la variabilele aleatoare discrete, cît și cele continue.

5. O variabilă aleatoare este continuă, dacă funcția sa de repartiție este continuă. Proprietățile funcției de repartiție continue sînt:

(a) $0 \le F(x) \le 1$ deoarece $F(x)$ este o probabilitate.

(b) $F(x_2) \ge F(x_1)$ dacă $x_2 > x_1$

.//.

Pentru a dovedi aceasta considerăm evenimentul $\xi < x_1$ şi evenimentul $x_1 \leq \xi \leq x_2$.

Deoarece aceste două evenimente sînt incompatibile avem:

$$P(\xi > x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \leq \xi \leq x_2)$$

De aci rezultă

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq \xi \leq x_2)$$

Aşadar $F(x)$ este nedescrescătoare. Dacă punem $x_2 = x_1 + \Delta x$ şi apoi $\Delta x \to 0$ rezultă:

$$P(\xi = x_1) = 0$$

deoarece $F(x)$ este continuă. Aceasta nu înseamnă că evenimentul $\xi = x_1$ este imposibil, deşi probabilitatea sa de realizare este zero. Spunem că este "aproape imposibil".

o) Dacă $\xi \in (a,b)$, adică dacă toate valorile posibile ale lui ξ aparţin intervalului (a,b) atunci:

$$F(x) = 0 \quad \text{pentru } x \leq a$$
$$F(x) = 1 \quad \text{pentru } x > b$$

Consecinţă:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Dacă $F(x)$ este derivabilă (clasic) atunci:

$$F(x+\Delta x) - F(x) \cong f(x)\Delta x$$

unde

$$f(x) = \frac{dF}{dx}.$$ Rezultă:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$$

Din relaţia:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

şi din cea precedentă se deduce:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(z)\,dz$$

Rezultă deci că:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$$

v.a. continue.

6. Momentul de ordinul K al unei variabile aleatoare continue este analogul continuu al celui discret:

$$M(\xi^k) = \int_a^b x^k f(x)\,dx = \int_a^b x^k\,df \quad ; \quad \xi \in (a,b)$$

.//.

7. Media şi dispersia variabilei aleatoare $\xi_6(a,b)$ continue sînt:

$$M(\xi)=\int_a^b xf(x)dx$$

$$D^2(\xi)=\int_a^b \overset{\circ}{x}{}^2 f(x)dx=\int_a^b \left[x-M(x)\right]^2 f(x)dx$$

8. In aplicaţii intervine frecvent repartiţia "normală" (Gauss), definită prin densitatea de probabilitate:

$$f(x;m,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right];\quad -\infty<x<+\infty$$

Aci m este media iar σ^2 dispersia. Probabilitatea ca variabilă aleatoare normală să ia o valoare în intervalul (x_1, x_2) este

$$P(x_1<\xi<x_2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Pentru calcule se introduce funcţia lui Laplace, care este repartiţia normală pentru m=o şi $\sigma=1$, aşadar

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y;o,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

Atunci rezultă şi:

$$P(x_1<\xi<x_2)=\phi\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right)$$

pentru orice repartiţie normală cu media m şi dispersia σ^2.

9. Pentru măsurători şi etalonare de aparate de măsură este utilă "regula celor trei sigma". Probabilitatea ca $\xi-m$ să satisfacă inegalitatea $|\xi-m|<\alpha$ este echivalentă cu

$$-\alpha<\xi-m<\alpha$$

$$-\alpha+m<\xi<\alpha+m$$

Aplicînd formula anterioară rezultă:

$$P\left(|\xi-m|<\alpha\right)=P(-\alpha+m<\xi<\alpha+m)=\phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)-\phi\left(-\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

Dar avem

$$\phi(-x)=1-\phi(x)\ \text{deci}$$

$$P\left(|\xi-m|<\alpha\right)=2\phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)-1$$

Alegînd $\alpha=3\sigma$ rezultă: $P(|\xi-m|<3\sigma)=2\phi(3)-1=0{,}9974$

Funcţia lui Laplace $\phi(x)$ este dată în tabele uzuale. Această "regulă a celor 3σ" este utilă în sensul următor: probabilitatea ca abaterea în valoare absolută să depăşească 3σ este $1-0,9974=0,0026$. Dacă etalonarea unui aparat se face după regula celor 3σ, atunci acel aparat prezintă garanţie la utilizarea pentru măsurători.

Aceasta este important cu atît mai mult în aviaţie, unde fiabilitatea mare cere măsurători cu erori cît mai mici.

In prelucrarea datelor se aplică şi criteriul χ^2. Variabila aleatoare

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_k^2$$

are ca densitate de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{s/2}\sigma^s \Gamma(s/2)}\, x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

s = este mom. de ordin superior introduse.

Funcţia $\Gamma(x)$ este dată de

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

şi are proprietăţile:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Să luăm un exemplu de aplicare a criteriului χ^2 (Pearson). Să presupunem că au fost efectuate n experimente independente, cu care s-a construit următorul tabel

intervalul	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	.....	x_k, x_{k+1}
frecvenţa	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	.....	$\overline{p}_k$

Alegem o repartiţie $F(x)$ (şi densitatea corespunzătoare $f(x)$) şi ne punem problema în ce măsură datele din tabel satisfac această lege. Putem impune şi restricţii asupra momentelor. De exemplu dorim ca această repartiţie să aibă media m, abaterea σ, precum şi momente de ordin superior. Numărul acestor restricţii îl notăm cu c. Alegerea criteriului χ^2 înseamnă a calcula

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(\overline{p}_i - p_i)^2}{p_i}$$

Pentru un număr m_i de măsurători conţinute în intervalul i putem considera

$$\overline{p}_i = \frac{m_i}{n}$$

Atunci rezultă:

$$\chi^2 = \sum_{1}^{K} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

Dacă fiecare variabilă η_i este considerată centrată şi de dispersie unitate atunci rezultă:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{s/2}\,\Gamma(s/2)}\, x^{s/2-1}\, e^{-s/2} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ x < 0 \end{cases}$$

In această expresie s este numărul de grade de libertate

$$s = K - C$$

unde K este numărul de intervale considerat, iar C este numărul de restricţii impus. Valoarea funcţiei χ^2 este tabelată, în funcţie de parametrul s, indicîndu-se şi probabilitatea ca χ^2 să ia o valoare mai mare decît cea din tabel. Aşadar, criteriul χ^2 permite a aprecia dacă o ipoteză statistică este acceptabilă şi cu ce probabilitate.

11. Dacă rezultatul unui experiment x este influienţat de rezultatul y al unui alt experiment, spunem că x este condiţionat de y. Astfel apare noţiunea de " probabilitate condiţionată". Notaţia introdusă este

$$p(x|y)$$

şi se citeşte "probabilitatea lui x condiţionat de y". Pentru aplicaţii este utilă formula lui Bayes

$$p(x|y) = \frac{p(x)p(y|x)}{\int p(x)p(y|x)dx}$$

O interpretare aplicativă este: $p(x|y)$ este probabilitatea condiţionată a lui x, după o măsurătoare însoţită de zgomotul y. Probabilitatea lui x înainte de apariţia valorii lui y este $p(x)$. Termenul $p(y|x)$ este denumit funcţie de similitudine şi este probabilitatea ca y. să ia valoarea sa observată, condiţionat de valorile posibile ale lui x.

XIII-2. Covarianța și corelația.

Notăm cu H spațiul variabilelor aleatoare reale x care au proprietatea că momentul de ordinul doi este finit

$$M(x^2) = \int_R x^2 df < \infty$$

Pentru $x, y \in H$ introducem produsul scalar

1. $$\langle x, y \rangle = M(xy) = \int_R xy\,df$$

Cu acest produs scalar organizăm pe H ca spațiu Hilbert, verificînd că:

a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

b) $\langle x, x \rangle \geq 0$

c) $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Introducem norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Conform definiției rezultă unele proprietăți utile și interpretări intuitive. Astfel

$$M(x) = \langle 1, x \rangle$$

Pentru variabilele centrate avem

$$M(\overset{\circ}{x}) = \langle 1, \overset{\circ}{x} \rangle = 0 \quad - \quad M(1 \cdot \overset{\circ}{x}) = M(\overset{\circ}{x}) = 0.$$

Considerăm hiperplanul $\overset{\circ}{H}$ în care sînt situate toate variabilele aleatoare centrate. Dreapta formată de 1 este ortogonală cu acest plan (produsul scalar este zero). Atunci, deoarece

$$x = \overset{\circ}{x} + M(x)$$

rezultă că aplicația $x \mapsto \overset{\circ}{x}$ este proiectorul ortogonal pe $\overset{\circ}{H}$ în H.

De asemenea, rezultă:

$$\|\overset{\circ}{x}\| = \sqrt{\langle \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{x} \rangle} = \sqrt{\int_R \overset{\circ}{x}^2\, df} = \sqrt{\sigma_x^2} = \sigma_x$$

Se numește „covarianță" a două variabile aleatoare $x, y \in H$:

$$V(x, y) = M(\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}) = \langle \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y} \rangle$$

Covarianța a două variabile aleatoare independente este nulă, deoarece

$$V(x, y) = M(\overset{\circ}{x})M(\overset{\circ}{y}) = 0$$

De asemenea, avem:

$$V(x, x) = M(\overset{\circ}{x}^2) = \sigma_x^2$$

.//.

Aceasta este motivul pentru care se utilizează cuvintele "dispersie" sau "varianţă" pentru σ^2.

Dacă două variabile aleatoare nu sînt independente, atunci rezultă $V(x,y)\neq 0$.

Pentru a indica în ce măsură aceste două variabile aleatoare sînt corelate, se introduce "indicele de corelaţie" definit ca:

$$\rho(x,y) = \cos(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{y}) = \frac{\langle \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y} \rangle}{\|\overset{\circ}{x}\| \cdot \|\overset{\circ}{y}\|} = \frac{M(\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y})}{\|\overset{\circ}{x}\| \cdot \|\overset{\circ}{y}\|} = \frac{V(x,y)}{\|\overset{\circ}{x}\| \cdot \|\overset{\circ}{y}\|} = \frac{M(\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

Observăm că $|\rho| \leq 1$. Pentru două variabile aleatoare independente avem $\rho=0$; atunci spunem că $\overset{\circ}{x} \perp \overset{\circ}{y}$ în H. Dacă $|\rho| = 1$ atunci există o constantă α astfel încît

$$\boxed{\overset{\circ}{y} = \alpha \overset{\circ}{x}}$$

sau există două constante α şi β astfel încît

$$\boxed{y = \alpha x + \beta}$$

adică cele două variabile aleatoare sînt liniar dependente (procedeul regresiei liniare).

In cazul sistemelor dinamice operăm cu variabile aleatoare vectoriale:

$$x = |x_1, \ldots, x_n\rangle$$

unde x_i sînt variabile aleatoare scalare. Covarianţa se defineşte atunci astfel:

$$V(x,x) = \begin{bmatrix} \overset{\sim}{\sigma}(x_1) & V(x_1,x_2) & \cdots & V(x_1,x_n) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ V(x_n,x_1) & \cdots & & \overset{\sim}{\sigma}(x_n) \end{bmatrix}$$

Aceasta este matricea Gram a vectorului $|\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n\rangle$. Dacă variabilele scalare x_i sînt toate independente între ele rezultă:

$$V(x,x) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

adică o matrice diagonală cu dispersiile respective pe diagonală. Această formă va apare ulterior în aplicaţii.

XIII-3. Sisteme aleatoare staţionare, de ordinul doi.

Considerăm sistemele la care starea $x(t)$ este o variabilă aleatoare, în orice moment t. Aşadar, la un moment t_0 fixat, $x(t_0)$ este o variabilă aleatoare descrisă prin repartiţie şi momente. Ne situăm în spaţiul H al variabilelor aleatoare $x(t)$ pentru care $M(x^2)<\infty$. Sistemul este considerat continuu în timp (în medie patratică) dacă aplicaţia $t \longmapsto x(t)$ este continuă pe R în H. Observăm că analogia cu sistemele deterministe permite şi aci clasificarea sistemelor în "timp continuu" şi "timp discret". Sistemele pentru care $M(x^2)<\infty$ le denumim "de ordinul doi". Sistemele de ordinul doi cu starea

$$x(t) = |x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\rangle$$

sînt "staţionare" dacă:

1. $x_i(t) \in H$ pentru orice $t \in R$ şi $i=1,2,\ldots,n$
2. $M[x(t)]$ este independentă de timp
3. $V[x_i(t_1-\theta), x_j(t_2-\theta)] = V[x_1(t_1), x_2(t_2)]$ pentru orice i, j, t_1, t_2 şi θ. → dici d. covar. transl. în tp.

Sistemul este centrat dacă $M[x(t)] = 0$

Asupra calculului efectiv al lui $M(x)$ trebuesc făcute anumite precizări.

Să luăm următorul exemplu: din n urne identice se extrag simultan, la un moment dat t_0, n bile. Dacă n este suficient de mare, se calculează media şi dispersia. Să luăm acum una din cele n urne, şi să extragem la diferite momente $t_1, t_2, \ldots, t_n$, cîte o bilă, cu restituire în urnă după fiecare extragere. Calculăm şi pentru acest caz media şi dispersia. Cu cît n este mai mare, cu atît sînt mai apropiate valorile mediei şi dispersiei, în cele două cazuri. Despre astfel de procese aleatoare, spunem că sînt "ergodice". In general între staţionaritate şi ergodicitate nu există o implicaţie reciprocă, deoarece există procese staţionare care nu sînt ergodice, şi reciproc.

In continuare, avem în vedere sisteme de ordinul doi, staţionare şi ergodice. Pentru aceste sisteme descrierea este suficient de bună dacă se cunoaşte media şi intercorelaţia. Pentru calculul mediei utilizăm formulele:

1. $$M[x(t_k)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(t_k)$$ pentru timp discret

2. $$M[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$ pentru timp continuu

In ambele cazuri avem asigurată convergenţa, în H.

.//.

Introducem noţiunea de "intercorelaţie" în modul următor: considerăm două procese staţionare, de ordinul doi, cu $x(t)$ şi $y(t)$ variabile aleatoare scalare:

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Prin definiţie, se numeşte "intercorelaţie" covarianţa:

$$\varphi_{x,y}(\theta) = v\left[x(t-\theta),\ y(t)\right] = \prec x(t-\theta), y(t) \succ$$

Dacă $x=y$, atunci φ_x este denumită "autocorelaţie".

Transformata Fourier al lui φ_x se numeşte "repartiţie spectrală"

$$S_x = \mathcal{F}\varphi_x$$

unde valoarea lui $S_x(\omega)$ este densitatea spectrală. Densitatea spectrală are următoarele proprietăţi:

① $S(\omega) = S(-\omega)$

② $S(\omega) \geqslant 0 \quad ; \quad \omega \in R.$

Aceste proprietăţi rezultă din proprietăţile lui φ_x şi ale transformatei Fourier .

S_x este denumit "densitate spectrală" în sensul că reprezintă densitatea spectrală de putere a semnalului $x(t)$. Justificarea se obţine considerînd momentul de ordinul doi

$$M\left[x^2(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt$$

drept "putere" a semnalului $x(t)$. Atunci putem nota:

$$\mathcal{F}x_T = \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dx$$

Calculăm limita

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left|\mathcal{F}x\right|^2$$

şi va rezulta (exerciţiu)

$$S_x(\omega) = \mathcal{F}\left[\varphi_x(\theta)\right]$$

Puterea semnalului, cuprinsă în banda de frecvenţe (ω_1, ω_2) se calculează cu:

$$P(\omega_1, \omega_2) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(\omega)\, d\omega$$

Să considerăm acum cîteva exemple pentru ilustrarea acestor concepte:

1^0. Se dă semnalul sinusoidal

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

.//.

unde faza α este o variabilă aleatoare. Se cere autocorelaţia φ_x şi densitatea spectrală S_x. Avem deci:

$$\varphi_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_m^2 \sin(\omega_0 t + \alpha) \sin\left[\omega_0(t-\theta) + \alpha\right] dt = \frac{x_m^2}{2} \cos\omega_0\theta$$

Pentru calculul densităţii spectrale, prescurtînd scrierea pentru trecerea la limită rezultă:

$$S_x = \int_{\mathbb{R}} \frac{x_m^2}{2} \cos\omega_0\theta \cdot e^{-i\omega\theta} d\theta = \frac{x_m^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \omega\omega_0\theta \cdot e^{-i\omega\theta} d\theta = \frac{x_m^2}{4} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega+\omega_0)\theta} d\theta + \int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega-\omega_0)\theta} d\theta \right].$$

Termenii din paranteză sînt şiruri reprezentative Dirac, deci prin trecerea la limită avem

$$S_x(\omega) = \frac{\pi}{2} x_m^2 \left(\delta_{\omega_0} + \delta_{-\omega_0} \right)$$

Prin urmare densitatea spectrală de putere este concentrată în punctele $\pm\omega_0$, adică la frecvenţa semnalului sinusoidal dat. Se verifică şi proprietăţile de paritate ($S(\omega) = S(-\omega)$) precum şi cea de semn definit $S(\omega) \geq 0$ (regularizanta).

2°. Prin analogie cu lumina albă, care are un spectru continuu se numeşte "zgomot alb" un semnal aleator la care densitatea spectrală de putere este continuă pe ω. De exemplu, considerăm semnalul $\delta(t)$. Acest semnal ar putea fi cazul idealizat al unei descărcări electrice în atmosferă, de intensitate foarte mare dar de durată foarte scurtă. Practic, se ştie că acest semnal este auzit în toată banda de radio (deci la orice frecvenţă).

Autocorelaţia este dată de:

$$\varphi_x = \langle \delta(t) + \delta(t-\theta) \rangle = \delta_\theta = \langle \delta(t), \delta(t-\theta) \rangle = \delta(\theta)$$

Densitatea spectrală de putere este atunci

$$S_x = \mathcal{F}\delta_\theta = 1$$

Aşadar spectrul acestui semnal este uniform. Puterea cuprinsă în banda (ω_1, ω_2) este:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(\omega)\, d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = \omega_2 - \omega_1$$

Prin urmare, puterea spectrală a zgomotului alb de acest gen este proporţională cu banda de trecere. Aşadar alegerea unui canal de transmitere a informaţiei trebue să ţină seamă de lărgimea de bandă în modul următor:

bandă largă din motive de dinamică a răspunsului;
bandă îngustă pentru micşorarea zgomotului.

°//°

Din aceste două condiţii rezultă necesitatea unui calc optimal.

3°. Alte exemple:

a. Zgomotul "Wiener", w(t), pentru mişcarea browniană, are următoarele caracteristici:

$$M(w)=0$$
$$M\left[(w(t_2)-w(t_1)).(w(t_4)-w(t_3))\right] = 0 \; ; \; t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$$
$$M(w^2) = tQ$$

unde Q este parametrul caracteristic. Acest semnal este ergodic, dar nu este staţionar.

b) Zgomotul Markov de ordinul întîi:

$$\varphi(\theta) = \sigma^2 e^{-\alpha|\theta|}$$

$$S(\omega) = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

c) Se demonstrează că orice funcţie aleatoare markoviană poate fi considerată ca starea unui sistem liniar exercitat de un zgomot alb:

$$\dot{x} = A(t) + v$$

unde v este zgomot alb de covarianţă (v(t) este centrat):

$$M\left[v(t).\, v'(\theta)\right] = Q(t)\delta_\theta \quad ; \quad Q(t) \geq 0$$

δ_θ este distribuţia Dirac.

XIII-4. Filtraj şi predicţie.

Să considerăm schema din figura XIII-1

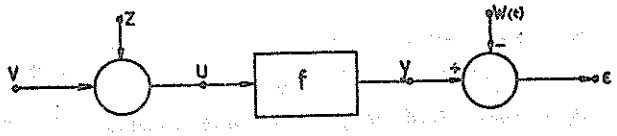


Fig. XIII-1

Fiind dat procesul aleator

$$t \longmapsto \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

staţionar, centrat, de ordinul doi, să se găsească un organ liniar f, cu intrarea u şi ieşirea y, astfel încît puterea spectrală a erorii

$$\int_{\varepsilon} = \int_{y-v} \quad ; \quad \varepsilon = y - v$$

.//.

să fie minimă. Atunci

1°. Pentru u=v+z şi w=v se obţine un filtru. Într-adevăr, la intrare se aplică v+z, unde z este zgomot, iar la ieşire apare $\xi = y - v$ care trebue minimizat în sensul minimizării puterii spectrale $\int S_\xi$. Soluţia este dată de ecuaţia Wiener - Hopf =

$$\varphi_{w,y} = \varphi_{u,v} = \int \varphi_u \quad ; \quad t \geq 0$$

unde $\varphi_{u,y}$ este funcţia de corelaţie intrare-ieşire, iar φ_u este autocorelaţia semnalului de intrare, ambele date. Se cere f care minimizează puterea spectrală a erorii.

2°. Pentru organul de predicţie punem

$$u = v \quad ; \quad w = u(t+T)$$

Eroarea este dată de $\xi = y(t) - u(t+T)$ adică eroarea de predicţie.

3°. Pentru filtraj şi predicţie (simultan) punem

$$u = v + z \quad ; \quad w = v(t+T)$$

Eroarea de filtrare şi predicţie este atunci: $\xi = y - v(t+T)$ şi se cere f care minimizează

$$\int S_{y - v(t+T)}$$

XIII-5. Filtrul Kalman

Considerăm un sistem diferenţial, liniar şi constant, cu intrarea şi ieşirea afectate de zgomot alb aditiv:

$$\dot{x} = Ax + B(u+v) \qquad \text{III-1}$$
$$y = Cx + w$$

Asupra zgomotelor v şi w se introduc următoarele ipoteze: v şi w sînt staţionare, centrate, de ordinul doi. In plus v şi w sînt necorelate, adică

$$\varphi_{v,w} = 0$$

Autocorelaţiile $\varphi_{v,v}$ şi $\varphi_{w,w}$ sînt considerate de forma

$$\varphi_{v,v} = \bar{Q}\delta$$
$$\varphi_{w,w} = \bar{P}\delta$$

unde $\bar{Q}$ şi $\bar{P}$ sînt matrice constante, reale, iar δ este distribuţia Dirac (scalară). Atît la intrare, cît şi la ieşire, zgomotul la o bornă este considerat necorelat cu zgomotul dela toate celelalte borne. Aşadar:

$$\langle v_i | v_j \rangle = 0 \quad \text{pentru } i \neq j$$

$$\langle w_i | w_j \rangle = 0 \quad \text{pentru } i \neq j$$

Rezultă deci că matricele $\bar{Q}$ şi $\bar{P}$ sînt diagonale. In aceste condiţii filtrul Kalman se realizează prin introducerea unui estimator de stare care să minimizeze eroarea introdusă de zgomote. Procedeul este următorul: se consideră sistemul dual

$$\dot{\bar{x}} = A'\bar{x} + C'\bar{u}$$

unde A' şi C' sînt transpusele lui A, respectiv C. Se consideră indicele de performanţă:

$$J = \int_0^\infty [\bar{x}'(BQB')\bar{x} + \bar{u}'\bar{P}\bar{u}]\,dt$$

Matricea estimatorului:

$$L = R_0 C \bar{P}^{-1}$$

se determină rezolvînd ecuaţia Riccati

$$-\dot{R} = AR + RA' - RC'\bar{P}^{-1}CR + B\bar{Q}B'$$

Notăm că această ecuaţie se construeşte cu matricele A' şi C', respectiv $B\bar{Q}B'$ şi $\bar{P}$. Pentru sistemele constante se consideră ecuaţia redusă ($\dot{R}=0$) iar soluţia R_0 se determină prin calcul algebric. Filtrul Kalman este însă demonstrat în forma dată de Kalman - Buoy pentru sisteme variabile, astfel încît A, B, C, sînt funcţii de timp. In aceste liniare

.//.

condiţii ecuaţia Riccati este o ecuaţie diferenţială; în practică se recurge întotdeauna la calcul numeric.

Pentru ilustrare să luăm un exemplu simplu:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x+u \\ y = x \end{cases} \quad ; \quad A=-1 \; ; \; B=1 \; ; \; C=1$$

Matricele de covarianţă sînt date:

$$\bar{Q} = 1 \quad ; \quad \bar{P} = K^2$$

Construim ecuaţia Riccati redusă

$$-2R - \frac{R^2}{K^2} + 1 = 0 \qquad \text{sau}$$

$$R^2 + 2K^2R - K^2 = 0 \qquad K \neq 0$$

K este diferit de zero deoarece $\bar{P}$ este întotdeauna nesingulară. Rezultă:

$$R = K^2\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{K^2}}\right)$$

Deoarece R trebue să fie pozitiv definită, estimatorul optimal este dat de

$$L = -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{K^2}}$$

Cu acest estimator, eroarea de estimare a stării este minimizată în sensul estremumului realizat de indicele de performanţă J. De aci rezultă proprietatea de "filtru". Pentru reglaj, se calculează matricea K din fig.XIII-2 cu un indice de performanţă dat sau prin alt procedeu de reglaj.

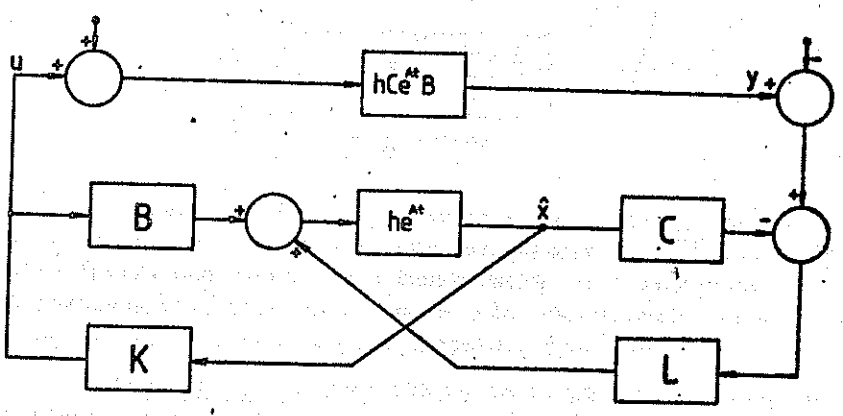


Fig. XIII-2.

.//.

Dacă se compară fig. XIII-2 cu fig.X-2 se observă că singura diferenţă este introducerea zgomotului la intrare şi la ieşire. Principial însă, în această schemă L se calculează pentru un estimator optimal, ceeace îi conferă funcţia de filtru.

In prezent filtrul Kalman are largi aplicaţii în automatizarea zborului, nu numai pentru reglaj. Intr-adevăr, construirea modelului,care în problema reglajului se consideră dat, necesită măsurători care în mod inevitabil sînt însoţite de erori. Filtrul Kalman este adaptabil şi unei astfel de probleme, deoarece minimizează efectul erorii.

Ideea filtrului Kalman a fost extinsă şi pentru cazul neliniar deşi o demonstraţie pentru aceasta nu există. In multe cazuri însă, aplicarea filtrului Kalman "generalizat" la cazul neliniar dă rezultate bune.

XIII-6 Formularea problemei reglajului.

Considerăm sistemele descrise de ecuaţiile:

$$x_{K+1} = F_1(x_K, u_K, \xi_{1K}, K)$$

$$y_K = F_2(x_K, \xi_{2K}, K) \quad ; \quad K \in \mathbb{N} \qquad \text{XIII-2}$$

unde x_K este starea la momentul K, u_K este comanda, y_K ieşirea. Funcţiile $\xi_1(K) = \xi_{1K}$ şi $\xi_2(K) = \xi_{2K}$ sînt variabile aleatoare care reprezintă "incertitudinea". Astfel, ξ_{1K} reprezintă incertitudinea asupra stărilor viitoare, iar ξ_{2K} reprezintă incertitudinea asupra citirii stării prezente x_K. Această formă are o mare generalitate pentru aplicaţii. In acelaş scop, al generalităţii, considerăm drept "regulator" organul care realizează următoarele două funcţiuni:

1. Estimează starea prezentă, cu o probabilitate condiţionată dedusă din trecut.

2. Elaborează şi aplică comanda optimală, rezultată din estimarea stării prezente. Indicele de performanţă are forma

$$\min J = M\left[\sum_{K_1}^{K_2} H(x_K, u_K, K)\right]$$

unde H este dat. Schema bloc a unui astfel de sistem este dată în fig. XIII-3.

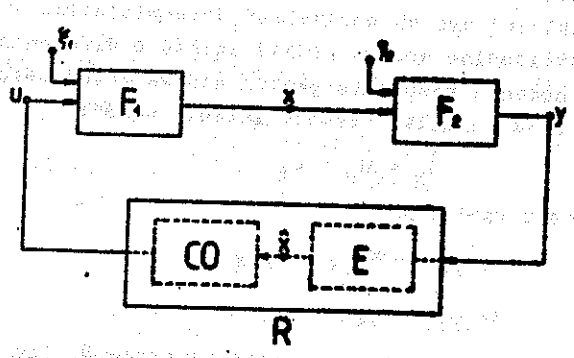


Fig. XIII-3.

In această schemă, regulatorul R are o funcţie dublă: E, estimarea stării, CO, elaborarea comenzii optimale. Cu $\hat{x}$ s-a notat starea estimată. Acceptînd dubla funcţionalitate a regulatorului, se ridică problema interdependenţei celor două funcţiuni. Cu această structură a regulatorului, apar trei proprietăţi specifice:

1. Separabilitatea. Dacă estimatorul furnizează starea estimată x (de obicei media stării prezente) atunci legea de reglaj optimal rezultă direct ca

$$u_K^0 = f(\hat{x}_K)$$

./.

Atunci se spune că regulatorul este separabil (în estimare și comandă).

2. Neutralitatea. Incertitudinea unei variabile aleatoare se poate măsura prin entropia S_K a repartiției de probabilitate condiționată a stării prezente x_K

$$S_K = \int_{x_K} p(x_K|y_K) \cdot \log p(x_K|y_K)\, dx_K$$

Sistemul este "neutral" cînd antropia S_K este independentă de comenzile anterioare ------- u_{K-1}. De exemplu, entropia unei repartiții normale (Gauss) cu matricea de covarianță Σ este dată de

$$S = \frac{1}{2} \log|\Sigma| + \text{constantă}.$$

Așadar un sistem cu repartiții normale este neutral dacă matricea de covarianță Σ_K este independentă de toate comenzile anterioare. De exemplu, filtrul Kalman satisface condițiile de separabilitate și neutralitate.

3. Echivalența deterministă. Dacă legea de reglaj este construită ca la un sistem deterministic cu u_K funcție de x_K, cu regulatorul separabil (nu există interacțiune între funcția de estimare și cea de reglaj), atunci sistemul are un echivalent deterministic. In problemele în care apare incertitudine asupra stării există o diferență între comanda optimală u^o și comanda rezultată pentru echivalentul deterministic u_e. Această diferență este denumită "eroare intențională":

$$\varepsilon_1 = u_o - u_e$$

De exemplu sistemul

$$x_{1,K+1} = x_{1,K} + x_{2,K}\, u_K$$

$$x_{2,K+1} = x_{2K}$$

unde $x_{1,K}$ este starea (scalară) cu repartiție normală, iar $x_{2,K}$ este o constantă necunoscută, are o incertitudine asupra stării exprimabilă prin

$$y_K = x_{1,K} + \xi_K$$

unde ξ_K este centrată, cu repartiție normală și reprezintă o secvență de variabile aleatoare de varianță σ_ξ^2. Funcția de estimator de stare, pentru acest sistem poate fi realizată de un filtru Kalman, care generează $(m_1, m_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$, cu o repartiție normală a probabilității condiționate $p(x_K|y_K)$. Matricea de covarianță:

.//.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

depinde însă de valorile trecute ale comenzilor, deci sistemul nu este neutral.

Similar cu echivalenţa deterministică, în anumite cazuri poate fi definit un sistem neutral echivalent. Dacă notăm cu u_n legea de reglaj stabilită pentru sistemul neutral echivalent, atunci numim "eroare de investigare" diferenţa

$$\varepsilon_{inv} = u^o - u_n$$

unde u^o este comanda optimală, iar u_n comanda neutrală.

Diferenţa dintre comanda neutrală u_n şi comanda echivalent deterministă u_o

$$\varepsilon_p = u_n - u_o$$

o denumim "eroare de precauţie". Aşadar există mai multe posibilităţi de a interpreta comanda optimală, ca de exemplu

$$u^o = u_o + \varepsilon_i$$

$$u^o = u_o + \varepsilon_{inv} + \varepsilon_p$$

$$u^o = u_n + \varepsilon_p$$

Aceste forme permit construirea unor comenzi suboptimale, de utilitate practică.

Un loc deosebit în aplicaţii îl are filtrul Kalman extins. Ideea este următoarea: de la sistemul neliniar XIII-2 se trece la un sistem liniar în prima aproximaţie

$$\tilde{x}_K = A\tilde{x}_{K-1} + B_1$$

$$\tilde{y}_K = C\tilde{x}_{K-1} + B_2$$

unde $\tilde{x}_K$ sînt abaterile dela programul dat $\hat{x}_o$. Acest sistem este liniar şi permite calculul filtrului Kalman, cu presupunerea suplimentară că densităţile de probabilitate sînt toate normale. Deoarece acest filtru se aplică sistemului neliniar, printr-o metodă cvazilineară, poartă denumirea de "filtrul Kalman extins". O indicaţie utilă pentru validitatea procedeului poate fi constatarea că termenii "inovaţie"

$$y_K - F_2(\hat{x}_o, o, K)$$

sînt variabile aleatoare independente, ceeace s-a presupus în general pentru filtrul Kalman. Filtrului Kalman extins la cazul neliniar i se mai spune şi "filtrul Kalman generalizat" studiat pe cale euristică, fără a dispune în prezent de o demonstraţie riguroasă.

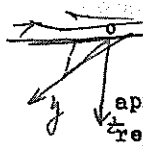
CAP.XIV. Construirea modelelor ; identificare

XIV-1. Modele pentru zborul de croazieră:

Pentru un avion de transport, regimurile de zbor sînt: decolare, aterizare, viraj, urcare-coborîre, croazieră. Am considerat regimurile de urcare-coborîre în cazul în care avionul schimbă altitudinea în timpul zborului. Pentru construirea modelului considerăm mai întîi zborul de croazieră; introducem următoarele ipoteze simplificatoare, cu condiţia ca aproximatiile rezultate să nu fie supărătoare:

1. Pămîntul este un sistem inerţial, iar atmosfera este imobilă prin raport cu pămîntul.

2. Masa avionului este constantă.



3. Avionul este un corp rigid.

In general, pentru intervale de timp suficient de scurte, aproximaţiile introduse sînt admisibile. Se introduce un sistem de axe rectangulare, legat de avion, în modul următor: axa Ox, axa longitudinală, orientată spre direcţia capului, Oy axa laterală, orientată în lungul aripei din dreapta, axa Oz axa verticală, orientată spre sol, astfel încît sistemul cartezian Oxyz este drept. Admitem că planul Oxz este un plan de simetrie al avionului. Apare astfel o nouă ipoteză:

4. Oxz este un plan de simetrie, astfel încît momentul de inerţie J_{xy} şi J_{yz} sînt nule:

$$J_{xy} = J_{yz} = 0$$

Presupunem însă că $J_{zx} \neq 0$, mai ales atunci cînd Ox nu este luată exact pe direcţia axei longitudinale principale a avionului. Viteza avionului V_p este un vector considerat în sistemul în care se mişcă avionul. Componentele vitezei sînt atunci:

$$V_T = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}$$

unde i, j, k sînt versorii în Oxyz. Viteza de rotaţie a avionului este

$$\omega = P\vec{I} + Q\vec{J} + R\vec{k}$$

Originea sistemului Oxyz este luată în centrul de masă al avionului; deoarece am considerat avionul corp rigid, centrul de masă este imobil faţă de avion. Aşadar traectoria avionului este curba descrisă de mişcarea centrului de masă în sistemul inerţial. Programul de zbor, în regim de croazieră este considerat ca suma forţelor şi momentelor care acţionează asupra avionului astfel:

$$\Sigma F_0 = 0 \quad ; \quad \Sigma M_0 = 0$$

Perturbaţiile inerente provoacă abateri dela program, astfel încît apar variaţiile faţă de program $\Sigma\Delta F$ şi $\Sigma\Delta M$. In acest mod, starea zero apare pentru zborul de croazieră neperturbat. Ecuaţiile de mişcare

.//.

se reduc atunci la

$$\sum \Delta F = m \frac{dV_r}{dt} \quad ; \quad \sum \Delta M = \frac{dH}{dt}$$

unde derivatele sînt calculate în raport cu sistemul inerţial. Derivata vitezei o calculăm ţinînd seamă şi de rotaţie. Rezultă:

$$\frac{d}{dt} V_r = \dot{U}\bar{\imath} + \dot{V}\bar{\jmath} + \dot{W}\bar{k}$$

$$\omega \times V_r = \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{bmatrix} = (QW - RV)\bar{\imath} + (RU - PW)\bar{\jmath} + (PV - QU)\bar{k}$$

Proiectînd pe $\sum \Delta F$ pe cele trei axe, din ecuaţia forţelor obţinem:

$$\begin{aligned} \sum \Delta F_x &= m(\dot{U} + QW - RV) \\ \sum \Delta F_y &= m(\dot{V} + RU - PW) \\ \sum \Delta F_z &= m(\dot{W} + PV - QU) \end{aligned} \qquad \text{XIV-1}$$

Pentru ecuaţia momentelor procedăm astfel: notăm cu r vectorul de poziţie al unui element de masă dm, faţă de centrul de masă al avionului. Atunci momentul elementar este

$$dM = (\omega \times r)dm$$

Rezultă deci momentul cinetic elementar:

$$dH = r \times (\omega \times r)dm$$

Dezvoltăm dublul produs vectorial, succesiv:

$$\omega \times r = \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{bmatrix} = (Qz - Ry)\bar{\imath} + (Rx - Pz)\bar{\jmath} + (Py - Qx)\bar{k}$$

Aşadar

$$r \times (\omega \times r) = \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x & y & z \\ Qz - Ry & Rx - Pz & Py - Qx \end{bmatrix} = \left[(y^2 + z^2)P - Qxy - xzR\right]\bar{\imath} +$$

$$+ \left[Q(z^2 + x^2) - Ryz - Pxy\right]\bar{\jmath} + \left[(x^2 + y^2)R - Pxz - Qyz\right]\bar{k}$$

Integrînd se obţine H :

$$H = \bar{\imath}\int \left[(y^2+z^2)P - xyQ - xzR\right]dm + \bar{\jmath}\int \left[(z^2 + x^2)Q - Ryz - Pxy\right]dm + \bar{k}\int \left[(x^2+y^2)R - Pxz - Qyz\right]dm$$

Au apărut deci momentele de inerţie; reamintind că am considerat $J_{xy} = J_{yz} = 0$ rezultă:

$$\begin{aligned} H_x &= PJ_x - RJ_{xz} \\ H_y &= QJ_y \\ H_z &= RJ_z - PJ_{xz} \end{aligned}$$

.//.

Calculăm derivata lui H în raport cu modulul şi argumentul:

$$\frac{dH_x}{dt} = \dot{P}J - \dot{R}J_{xz}$$

$$\frac{dH_y}{dt} = \dot{Q}J_y$$

$$\frac{dH_z}{dt} = \dot{R}J_z - \dot{P}J_{xz}$$

Pe de altă parte

$$\omega \times H = (QH_z - RH_y)\bar{i} + (RH_x - PH_z)\bar{j} + (PH_y - QH_x)\bar{k}$$

Suma momentelor o scriem de asemenea pe componente:

$$\Sigma \Delta M = \bar{i}\,\Sigma\Delta\mathcal{L} + \bar{j}\,\Sigma\Delta\mathcal{M} + \bar{k}\,\Sigma\Delta\mathcal{N}$$

Rescriind ecuaţia momentelor pe componente rezultă:

$$\begin{aligned}
\Sigma\Delta\mathcal{L} &= \dot{P}J_x - \dot{R}J_{xz} + QR(J_z - J_y) - PQJ_{xz} \\
\Sigma\Delta\mathcal{M} &= \dot{Q}J_y + PR(J_x - J_z) + (P^2 - R^2)J_{xz} \qquad \text{XIV-2} \\
\Sigma\Delta\mathcal{N} &= \dot{R}J_z - \dot{P}J_{xz} + PQ(J_y - J_x) + QRJ_{xz}
\end{aligned}$$

Ecuaţiile XIV-1 şi XIV-2 descriu zborul de croazieră în condiţiile ipotezelor simplificatoare introduse. In ipoteza perturbaţiilor mici aceste ecuaţii pot fi linearizate; totodată este necesar a explicita forţele şi momentele ΣF şi ΣM, ceeace va introduce comenzile. Prin extensie din navigaţia marină, axele de rotaţie au şi denumirile următoare:

Ox	axa de ruliu.
Oy	axa de tangaj
Oz	axa de giraţie

Rotaţia axelor Oxyz, faţă de sistemul inerţial legat de pământ OXYZ este descrisă de unghiurile lui Euler, după cum urmează:

ψ unghiul dintre OX şi proiecţia lui Ox în planul OXY (planul orizontal)

θ unghiul dintre proiecţia orizontală a lui Ox şi axa Ox (unghiul θ este situat într-un plan vertical

ϕ notăm cu ON dreapta de intersecţie a planurilor OXY şi Oxy (linia nodală). Atunci ϕ este unghiul dintre ON şi Oy, măsurat în planul Oyz.

Astfel, recunoaştem unghiurile lui Euler, denumite şi precesie, nutaţie şi rotaţie.

.//.

Vitezele de rotaţie corespunzătoare sînt evident pe normala la plan, aşadar:

$\dot{\psi}$ pe axa Oz
$\dot{\theta}$ pe axa ON
$\dot{\phi}$ pe axa Ox

Legătura dintre P,Q,R şi ψ, θ, ϕ se obţine prin proiecţiile respective pe axele Ox, Oy şi Oz, aşadar:

$$P = \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta$$
$$Q = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi$$
$$R = -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi$$

Rezolvînd prin raport cu $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ şi $\dot{\psi}$ se obţine :

$$\dot{\theta} = Q\cos\phi - R\sin\phi$$
$$\dot{\phi} = P - Q\sin\phi\,tg\theta + R\cos\phi\,tg\theta$$
$$\dot{\psi} = Q\frac{\sin\phi}{\cos\theta} + R\frac{\cos\phi}{\cos\theta}$$

Componentele forţei de gravitaţie pe axele Oxyz sînt

$$G_x = -mg.\sin\theta$$
$$G_y = mg.\cos\theta\sin\phi$$
$$G_z = mg.\cos\theta\cos\phi$$

In fine, trebuiesc luate în considerare forţele şi momentele introduse de comenzi. Pentru zborul de croazieră simplificarea merge destul de departe; dinamica longitudinală (în plan vertical) se consideră decuplată de mişcarea laterală (ruliu , giraţie, alunecare). Astfel, dacă considerăm avionul stabilizat lateral, atunci în ecuaţiile de mişcare avem:

$$P = R = V = 0 \quad \text{deci}$$
$$\Sigma\Delta F_x = m(\dot{U} + WQ)$$
$$\Sigma\Delta F_z = m(\dot{W} - UQ)$$
$$\Sigma\Delta M = \dot{Q}J_y$$

care descriu dinamica longitudinală. Pentru dinamica laterală rezultă (decuplată)

$$\Sigma\Delta F_y = m(\dot{V} + UR - WP)$$
$$\Sigma\Delta\mathcal{L} = \dot{P}J_x - \dot{R}J_{xy} + QR(J_z - J_y) - PQJ_{xz}$$
$$\Sigma\Delta\mathcal{N} = \dot{R}J_x - \dot{P}J_{xz} + PQ(J_y - J_x) + QRJ_{xz}$$

Decuplarea introduce aproximaţii acceptabile, dar numai la abateri mici şi la avioanele la care momentul de inerţie J_x este comparabil cu J_y şi J_z. Atunci diferenţele $J_x - J_z$ şi $J_y - J_x$ sînt mici, termenii respectivi din ecuaţiile XIV-2 devin neglijabili şi deci decuplarea este posibilă. La avioanele de luptă masa este din ce în ce mai mult concentrată în jurul axei Ox, ceeace face ca J_x să scadă sensibil, astfel încît neglijările termenilor respectivi nu mai sînt admisibile.

Alt factor care intensifică efectul de cuplare a celor două mişcări sînt efectele aero-dinamice. De exemplu, dacă avionul se roteşte în jurul axei Ox la un unghi de atac α diferit de zero, pentru un ruliu mai mare de 90^0 unghiul de atac α devine unghi de alunecare β, după 180^0 unghiul de atac schimbă semnul, iar după 270^0 devine din nou unghi de alunecare. Această alternare a lui α în β şi reciproc face ca momentele aerodinamice să alterneze în momente de tangaj şi giraţie.

Combinarea celor două (momentele de inerţie şi momentele aerodinamice) fac ca decuplarea dinamicii longitudinale de cea laterală să nu mai mai fie admisibile.

Pentru zborul de croazieră vom considera cele două mişcări decuplate. In continuare se trece la liniarizarea ecuaţiilor decuplate, introducînd şi comenzile. In acest mod, pentru zborul de croazieră rezultă modele liniarizate de forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_q & M_u & M_\alpha & 0 \\ 0 & X_u & X_\alpha & -g \\ 1 & Z_u & Z_\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ u \\ \alpha \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_e & 0 \\ X_e & X_T \\ Z_e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_T \end{bmatrix}$$

pe care l-am analizat în detaliu în capitole anterioare. Starea este descrisă de valorile incrementale (de exemplu: $Q = Q_0 + q$, etc) ale următoarelor variabile:

q = viteza de tangaj, rad/s.
u = viteza longitudinală, m/s.
α = unghiul de atac, rad.
θ = unghiul de tangaj, rad.

Matricea de stare A are ca elemente derivatele parţiale (Jacobianul) rezultate din liniarizare, considerate în sistemul de referinţă aerodinamic, la care axa Ox coincide cu direcţia vectorului viteză în regim de croazieră neperturbat. In matricea A apare şi acceleraţia gravitaţiei g. Derivatele parţiale care apar la liniarizare sînt denumite şi derivate de "stabilitate", atunci cînd sînt considerate în sistemul de referinţă aerodinamic. Matricea de comandă B conţine

.//.

derivatele parţiale rezultate din liniarizare, raportate la sistemul de referinţă aerodinamic, iar comenzile sînt:

δ_p δ_p = unghiul de bracare al profundorului (rad), considerat faţă de comanda fixată prin programul de zbor (deci incremental)

δ_T δ_T = unghiul incremental al manetei de gaze, rad.

Pentru dinamica laterală luăm ca exemplu

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_p & L_r & L_\beta & 0 \\ N_p & N_r & N_\beta & 0 \\ Y_p & Y_r & Y_\beta & g/V_0 \\ 1 & \alpha_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_a & L_d \\ N_a & N_d \\ Y_a & Y_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_d \end{bmatrix}$$

unde starea incrementală este descrisă de:

p = viteza de ruliu rad/s.
r = viteza de giraţie, rad/s.
β = unghiul de alunecare, rad
φ = unghiul de ruliu, rad

Comenzile sînt:

δ_e δ_a = unghiul de bracare al elerocanelor (rad)

δ_d . δ_d = unghiul de bracare a direcţiei (rad).

Elementele matricei de stare şi ale matricei de comandă sînt calculate în funcţie de derivatele parţiale care rezultă la liniarizare. In matricea de stare mai apar:

V_0 = viteza de referinţă, m/s.
α_0 = unghiul de atac de referinţă, rad
g = acceleraţia gravitaţiei, m/s^2

Evident, există şi alte forme ale acestor ecuaţii de mişcare în care stările sînt considerate în alt mod; de exemplu, la mişcarea longitudinală introducînd starea

$$x = \{ q, u, w, \theta \}$$

unde w este viteza pe Oz.

Iată şi un exemplu numeric:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,49 & 0,00005 & -4,8 & 0 \\ 0 & -0,015 & -14 & -32,2 \\ 1 & -0,00019 & -0,84 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ u \\ \alpha \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8,7 & 0 \\ -1,1 & 8,9 \\ -0,11 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_T \end{bmatrix},$$

.//.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,6 & 0,25 & -38 & 0 \\ -0,075 & -0,27 & 4,4 & 0 \\ 0,078 & -0,99 & -0,23 & 0,052 \\ 1 & 0,078 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 0,82 & -3,2 \\ 0 & 0,046 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_d \end{bmatrix}$$

Pentru studii şi proiectări în condiţii de turbulenţă atmosferică sînt necesare modele ale turbulenţei. De exemplu, pentru rafale de aer pe direcţie verticală se utilizează ca model

$$S_t = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{L}{V} \frac{4}{4+\left(\frac{L}{V}w\right)^2}$$

unde S_t este densitatea spectrală de putere a rafalelor, w este frecvenţa, L un factor de scară, V viteza aerului, σ^2 dispersia rafalelor. Valori uzuale pentru aceşti parametri sînt:

	nivelul mării	peste 800 m. altitudine
L(m)	70	800

Intre 70 şi 800 m. se consideră o variaţie liniară a lui L. De asemenea:

	nominală	cer acoperit (cumulus)	furtună
σ (m/s)	2	5	10

Modelele de mai sus mai trebuesc completate cu ecuaţiile senzorilor şi ai elementelor de acţionare. In multe cazuri caracteristicele dinamice ale senzorilor, în banda de frecvenţă a semnalelor din instalaţiile pilotului automat, pot fi considerate elemente proporţionale, fără a introduce aproximaţii inadmisibile. Totuşi, zgomotul introdus nu poate fi întotdeauna neglijat. Surselе de perturbaţii pentru senzori sînt: zgomotul propriu, efectele aeroelastice, efectele turbulenţei atmosferice, vibraţiile motoarelor, etc.

Pentru simulări, acest zgomot este considerat zgomot alb dat de un filtru trece jos de ordinul întîi, cu densitatea spectrală dată (zgomot markovian). Aşadar, în general senzorii nu introduc ecuaţii diferenţiale suplimentare, astfel încît dimensiunea sistemului nu creşte din cauza senzorilor.

Elementele de acţionare măresc însă dimensiunea sistemului, deoarece dinamica lor este necesar să fie aproximată prin ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi sau doi. In unele cazuri, nu se poate renunţa la caracteristica de histeresis, astfel încît se introduc şi elemente neliniare.-

.//.

In tabelul care urmează sînt date valori numerice pentru funcţiile de transfer ale acţionărilor, pe un caz de studiu simulat:

	ordinul întîi	ordinul doi	viteza de bracare	poziţiile limită
tangaj	$\tau = 0,08$ s	$\omega = 62,8$ rad/s $\zeta = 0,7$ 1/s	25^0/s	$-26,5^0$ (în sus) $+ 6,75^0$ (în jos)
ruliu	$\tau = 0,0333$	$\omega = 62,8$ $\zeta = 0,7$	140^0/s	$\pm 30^0$
giraţie	$\tau = 0,04$	$\omega = 62,8$ $\zeta = 0,7$	70^0/s	$\pm 6^0$

Modelul mai poate fi completat cu efectele aeroelasticităţii; pentru cazul cvazi-static aceste efecte pot fi prinse la calculul derivatelor de stabilitate. Cazul cînd matricea de stare A şi matricea de comandă B conţin variabile aleatoare, prezintă cel puţin un interes de studiu, dar pot fi utile şi în practică. In schimb, efectul încovoierii avionului nu poate fi neglijat în cazul acceleerometrelor şi giroscoapelor, astfel încît sînt necesare corecţii la ieşirea senzorilor, în funcţie de momentul încovoietor nestaţionar.

In perspectivă, aceste modele trebuesc din ce în ce mai mult adaptate mediului, astfel încît pilotul automat să se adapteze la schimbările mediului înconjurător, sau/şi condiţiilor de zbor. Sistemele care răspund acestor cerinţe sînt "sisteme adaptive".

XIV-2. Un model pentru aterizare.

In paragraful X-3 a fost menţionat un model pentru aterizare, la care se cerea decuplarea statică. Revenim asupra acestui model, repetînd aci notaţiile introduse:

$$x = |q, u, \gamma, \theta>$$

$$u = |\delta_P, \delta_T, \delta_E, \delta_S>$$ (profundor, tracţiune, flapsuri, spoilere).

Starea conţine în locul unghiului de atac α, unghiul la traiectorie γ. Zborul este programat prin u_c, γ_c, θ_c şi se cere ca aceste comenzi să fie decuplate static cu ieşirea

$$y = |u, \gamma, \theta>$$

Procedeul este cel expus în X-3 şi nu mai revenim asupra lui. In schimb ne interesează în mod deosebit efectul turbulenţei atmosferice la aterizare. Statistic, mai mult de 50% din accidentele de aviaţie au loc la aterizare şi decolare, deci acordarea unei atenţii suplimentare aterizării este justificată.

In exemplul anterior modelul se referă la dinamica longitudinală a avionului la aterizare, pe pantă.

.//.

Să prezentăm un model al atmosferei turbulente, utilizat la aterizarea automată, cu dinamicele decuplate. Astfel, pentru dinamica longitudinală:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{w}_x \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_x \\ u_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

In general, cu u,v,w s-au notat componentele longitudinale, laterale şi normale ale vitezei vîntului turbulent. In ecuaţiile de mai sus se consideră:

w_0 = viteza turbulenţei verticale uniforme

w_x = gradientul longitudinal al vitezei turbulenţei pe verticală

u_0 = viteza turbulenţei longitudinale uniforme

Zgomotul alb la intrare este centrat, de covarianţă

$$\langle \eta(x_1) | \eta(x_2) \rangle = \sigma^2 L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(x_1 - x_2)$$

unde σ^2 este dispersia vitezei turbulente, iar L un factor de scară care depinde de natura solului, de altitudine, etc. Pentru determinarea matricei de stare şi a matricei de comandă se utilizează modele ale atmosferei turbulente, ca de ex. cele date de von Karman, Kolmogorov, etc, aplicate la condiţiile concrete ale proiectului instalaţiei de aterizare automată.

Pentru dinamica laterală:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{v}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{w}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_x \\ u_y \\ w_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

v_0 = viteza turbulentă laterală uniformă

v_x = gradientul longitudinal al vitezei turbulenţei laterale

u_y = gradientul lateral al vitezei turbulenţei longitudinale

w_y = gradientul lateral al vitezei turbulenţei verticale

Zgomotul alb la intrare este centrat, de covarianţă

$$\langle \eta(x_1) | \eta(x_2) \rangle = \sigma^2 L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(x_1 - x_2)$$

.//.

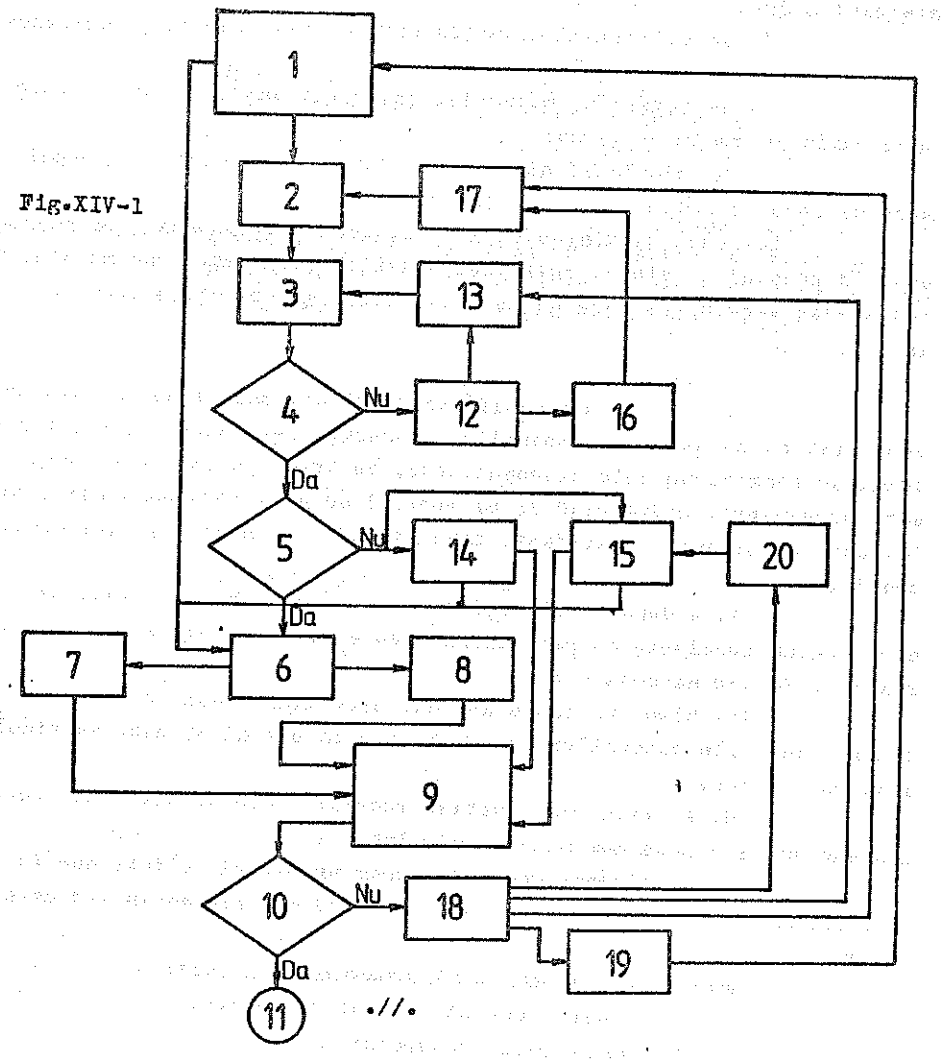
XIV-3. Construirea modelului din rezultatele măsurătorilor.

Modelele construite pleoînd dela legi fizice au puţine şanse de verificare experimentală, în special din cauza idealizărilor introduse. Din acest motiv, pentru a face un model operant, este necesar să fie confruntat cu măsurătorile efectuate în zbor.

Procedeele prin care se construieşte un model din datele rezultate la măsurare se mai numesc şi procedee de "identificare".

Pentru simulare este important a alege modelul cel mai redus ca ordin, dar astfel încît să reprezinte satisfăcător dinamica sistemului dat. Ideea este ilustrată în fig. XIV-1.

Fig.XIV-1



.//.

Algoritmul este iterativ şi cuprinde următoarele blocuri:

1. Se dau date privind specificaţiile, performanţele şi alte caracteristici necesare.

2. Se alege cel mai simplu model

3. Se aleg senzorii

4. Bloc logic: dacă toate stările sînt observabile, se continuă cu 5. Dacă nu sînt observabile se trece la 12.

5. Bloc logic: dacă sistemul este constant se continuă cu 6. Dacă sistemul nu este constant se trece la 14 şi 15.

6. Se calculează matricele de stare şi de comandă, pentru sistemul redus.

7. Se calculează modurile şi vectorii proprii pentru sistemul redus.

8. Se determină modurile, respectiv variabilele de stare care rămîn în regim staţionar

9. Se simulează sistemul extins dat, folosind însă numai modelul redus construit în etapele precedente.

10. Dacă simularea cu modelul redus realizează performanţele date la punctul 1, atunci estimarea stărilor şi construirea modelului redus este terminată. Dacă nu se realizează performanţele date, se trece la blocul 18.

11. Terminat.

12. Prima ramificaţie: sistemul de senzori nu asigură observabilitatea, se determină modurile neobservabile. Cauzele pot fi: a) sistemul de senzori nu este corespunzător, se trece la 13, care adaogă sau schimbă senzori, modificînd 3; b) modelul nu este corespunzător, blocul 16, care stabileşte acest fapt, trecîndu-se la blocul 17, care modifică modelul.

14. A doua ramificaţie: sistemul nu este constant, se construeşte un model pas cu pas, cu matricele de stare şi de comandă variabile. Pentru aceasta avem:

15. Bloc cu filtru Kalman, care minimizează eroarea de estimare. Ieşirile blocurilor 14 şi 15 merg la blocul 9, unde se simulează sistemul extins.

18. A treia ramificaţie: modelul redus nu satisface performanţele date; există mai multe posibilităţi:

20. Se fixează modurile neperturbate şi se introduc în filtrul Kalman 15, matricea de covarianţă fiind modificată în mod corespunzător.

Dela blocul 18 mai sînt următoarele ieşiri:

13 - modificarea sistemului de senzori;

17 - modificarea modelului ;

.//.

19. Modificarea specificaţiilor, performanţelor sau ale altor caracteristici ale modelului, cu ieşirea la blocul 1, astfel încît ciclul se reia dela început.-

Rezumînd, acest algoritm reprezintă o metodă de estimare a stării printr-un procedeu iterativ. Este important de ales un model care are dimensiunea cea mai mică, pentru a reduce complexitatea, dar numai cu condiţia ca modelul redus să reprezinte satisfăcător dinamica sistemului dat. Algoritmul permite elaborarea modelului şi în cazul în care sistemul dat nu este constant, prin introducerea unui filtru Kalman

. Modelul redus este verificat prin simulare pe sistemul dat, astfel încît la apariţia unor erori inacceptabile se reiterează calculul, aşa cum apare în schema din fig. XIV-1.-

XIV-4. Determinarea matricei exponenţiale.

Pentru calcule numerice se alege un pas de eşantionare T, iar matricea exponenţială se calculează numeric pentru acest pas. Alegerea lui T este foarte importantă, deoarece rezultatul calculului depinde direct de această alegere. Dacă T a fost bine ales, atunci matricea exponenţială este determinată pentru orice KT (prin produs de matrice).

In problema identificării se cere matricea e^{AT}; presupunem că starea poate fi măsurată direct în orice moment KT. Atunci avem:

$$x_T = e^{AT} x_0$$
$$x_{2T} = e^{AT} x_T = e^{2AT} x_0$$
$$x_{3T} = e^{AT} x_{2T}$$
$$\text{----------}$$
$$x_{KT} = e^{AT} x_{(k-1)T}$$

Aceste ecuaţii pot fi rescrise astfel:

$$\underbrace{[x_T \vdots x_{2T} \vdots \cdots \vdots x_{kT} \vdots \cdots]}_{X_T} = e^{AT} \underbrace{[x_0 \vdots x_T \vdots x_{2T} \vdots \cdots \vdots x_{kT} \vdots \cdots]}_{X_0}$$

sau

$$e^{AT} X_0 = X_T \qquad \text{XIV-3}$$

Aceasta este un sistem liniar de ecuaţii, în care X_0 şi X_T sînt date, iar e^{AT} este necunoscută. Deoarece măsurătorile pot fi continuate mai mult decît numărul de paşi strict necesar pentru rezolvare, sistemul poate fi supradeterminat. Pe de altă parte, nu întotdeauna este cunoscută dimensiunea spaţiului stării sistemului, deci nici dimensiunea lui e^{AT}.

Toate acestea sugerează efectuarea unor măsurări astfel încît

.//.

XIV-3 să rezulte supradeterminat, după care se calculează pseudo-soluția normală. Rezultatul calculului se verifică prin simulare. Notăm că pe calea descrisă aci poate rezulta o matrice pentru un sistem de ordin redus, dar care descrie satisfăcător dinamica sistemului dat,

Pentru ilustrarea procedeului, să considerăm din nou dublul integrator ; se măsoară stările la interval de o secundă (T=1) și rezultă:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \end{bmatrix}$$

Notăm:

$$e^{A\cdot A} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

Construim sistemul XIV-3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} e_{12} & e_{11} + e_{12} & 2e_{11} + e_{12} & 3e_{11} + e_{12} & \cdots \\ \hdashline e_{22} & e_{21} + e_{22} & 2e_{21} + e_{22} & 3e_{21} + e_{22} & \end{array}\right]$$

Rezultă imediat

$$e^{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prin înmulțire obținem e^{AK} ; într-adevăr

$$e^{2A} = e^{A} \cdot e^{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad e^{3A} = e^{A} \cdot e^{2A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

Deoarece am presupus că dimensiunea n a spațiului stărilor este cunoscută (corespunzător unei realizări minimale), ecuația XIV-3 poate fi scrisă cu matricele X_0 și X_T de dimensiune $n \times n$. In plus, deoarece realizarea este minimală, cele două matrice X_0 și X_T sînt nesingulare, iar e^{AT} este oricum nesingulară. In acest caz avem :

$$e^{AT} = X_T X_0^{-1} \qquad \text{XIV-4}$$

Reluînd exemplul de mai sus avem :

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.//.

dar

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aşadar, pentru acest procedeu, este esenţială cunoaşterea dimensiunii n a sistemului dat.

Pentru sisteme în timp discret procedeul este acelaş, deoarece

$$x_1 = Ax_0 \quad ; \quad u = 0$$
$$x_2 = Ax_1 = A^2x_0$$
$$x_3 = Ax_2 = A^3x_0$$
$$\text{----------}$$

Rezultă deci:

$$\left[x_1 \vdots x_2 \vdots x_3 \vdots \text{----} \right] = A \left[x_0 \vdots x_1 \vdots x_2 \text{ ------} \right]$$

Dacă se cunosc stările, rezultă matricea A.

Ca exemplu, să considerăm şirul Fibonacci, descris de

$$y(t+2) = y(t+1) + y(t)$$

Cu notaţiile: $y(t) = x_1$

$$y(t+1) = x_2$$

rezultă:

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

Să presupunem că se măsoară succesiv x_1 şi x_2 şi obţinem:

x_1	1	1	2	3	5	- - -
x_2	1	2	3	5	8	- - -

Atunci matricea A este dată de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De unde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.//.

XIV-5. Estimarea stărilor incerte.

Măsurătorile posedă erori inerente; măsurătorile cu zgomot y asupra unei stări aleatoare x, pun problema reducerii incertitudinii asupra valorii lui x. Una din metodele posibile este regula lui Bayes, care pleacă dela formula:

$$p(x|y) = \frac{p(x)\ p(y|x)}{\int p(x)p(y|x)dx}$$

unde $p(x|y)$ este densitatea de probabilitate condiţionată pentru variabila aleatoare x, după o măsurătoare însoţită de zgomot y; $p(x)$ este densitatea de probabilitate a lui x, înainte de apariţia rezultatului măsurătorii y; $p(y|x)$, denumit funcţie de similitudine, este probabilitatea ca y să ia valoarea sa observată, condiţionat de valorile posibile ale lui x. Pentru descrierea metodei, luăm un exemplu scalar:

$$y = x + \xi$$

unde x este starea, iar ieşirea conţine un zgomot aditiv, dat de variabila aleatoare ξ. Să presupunem că înainte de măsurare x este dat de o repartiţie normală, de medie m_0 şi dispersie σ_0^2. Atunci avem:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) = \mathcal{N}(m_0, \sigma_0^2)$$

Presupunem că zgomotul este independent de x, este cu repartiţie normală; dar centrat; aşadar

$$p(\xi) = \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$$

Dacă y măsurat ia valoarea particulară $\bar{y}$, zgomotul este dat de

$$\xi = \bar{y} - x$$

Funcţia de similitudine devine:

$$p(y=\bar{y}|x) = p(\xi = \bar{y}-x) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{y}-x)^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

Utilizînd formula lui Bayes rezultă:

$$p(x|\bar{y}) = \frac{\sigma_0\sigma_\xi 2\pi \exp\left[-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(\bar{y}-x)^2}{2\sigma_\xi^2}\right]}{\sigma_0\sigma_\xi 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(\bar{y}-x)^2}{2\sigma_\xi^2}\right] dx}$$

Notînd:

$$m = \frac{\sigma_\xi^2 m_0 + \sigma_0^2 \bar{y}}{\sigma_0^2 + \sigma_\xi^2} \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_0^2\sigma_\xi^2}{\sigma_0^2 + \sigma_\xi^2}$$

Cu aceste notaţii, expresia precedentă poate fi adusă la forma

$$\varphi(x|\bar{y}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \eta(m,\sigma^2)$$ (repartiţia normală).

Din relaţiile precedente se mai poate deduce

$$m = m_0 + \frac{\sigma^2}{\sigma_\xi^2}(\bar{y} - m_0)$$

Se observă că m_0 este valoarea aşteptată a lui x, înainte de măsurare.

Cel de al doilea termen este proporţional cu $\bar{y} - m_0$, adică se situează între valoarea măsurată şi cea aşteptată. Acest termen are rolul unei corecţii a lui m_0, în urma informaţiei suplimentare adusă de măsurare; uzual este denumit termenul "inovaţie".

Tot astfel deducem:

$$\sigma^2 = k\sigma_0^2$$

unde

$$0 < k = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_0^2 + \sigma_\xi^2} < 1$$

Aşadar $\sigma^2 < \sigma_0^2$; cu alte cuvinte, dispersia după măsurare este mai mică, deci măsurarea reduce incertitudinea.

Cap.XV. Elemente de avionică.

XV-1 Introducere.

Termenul "avionică" are deja o răspîndire semnificativă, deşi pentru moment definirea unei discipline cu acest titlu este prematură. Aci îl vom utiliza în sensul sintagmei " avionics and controls" , cu următorul conţinut:

1- Conducerea AZ după programul de zbor, adică problemele ghidării, navigaţiei şi controlul traficului aerian.

2 - Sisteme automate = pilotul automat, automatizarea motoarelor, controlul activ.

3 - Aparatele de bord : afişarea la bord, controlul funcţionării AZ, ergonomia bordului, etc.

4 - Integrarea sistemului de conducere a AZ, incluzînd arhitectura sistemului, comunicaţiile intra-sistem.

5 - Tehnici fundamentale: senzori, tehnici de analiză şi sinteză, metodologia programării,etc.

Problemele enumerate mai sus nu epuizează conţinutul avionicii, dar acoperă o mare parte a acestei discipline. In continuare vom prezenta ideile mai importante precum şi realizări recente ale acestui domeniu.

Deoarece avionica s-a dezvoltat rapid în ultimul deceniu,ajungîndu-se ca echiparea avionului să reprezinte un cost mai ridicat decît al avionului neechipat,precum şi ca urmare a faptului că datorită avionicii performanţele au fost mult îmbunătăţite,s-a ajuns la opinia că pentru orice categorie de specialişti în domeniul aero-spaţiale instruirea în "Avionică" este neapărat necesară.Ca urmare s-au introdus cursuri care răspund acestei necesităţi,după cum urmează :

Stabilitate,Automatizare,Ghidaj şi navigaţie,Instalaţii electrice şi electronice,Tehnica de calcul (echipamente),Stiinţa calculului (programare şi sisteme de operare).Aceste cursuri cer un volum de ore care nu poate fi acceptat numai prin suplimentarea orarului,ci şi prin reduceri dela alte discipline.Soluţia adoptată de unele institute mai avansate este întărirea caracterului fundamental al învăţămîntului (inclusiv pregătirea în avionică),ceeace asigură şi o mai bună adaptabilitate a absolventului la dinamica rapidă a tehnologiei,dar creează şi o rezervă de timp pentru o mai bună pregătire.

XV-2 Conducerea AZ după programul de zbor

Din clasa AZ vom alege avionul ca tip de referinţă; ulterior ne vom referi şi la helicoptere, rachete şi sateliţi, cu cîteva probleme de avionică specifice.

Convenţional, mişcarea avionului este determinată dacă se cunosc orientarea, parametrii de navigaţie şi parametrii de ghidaj.

Orientarea se determină prin cele trei unghiuri ale lui Euler, considerînd dinamica avionului în cazul rigidului cu un punct fix (centrul de masă al AZ).

Parametrii de navigaţie rezultă din fig. XV-1 considerînd că avionul este dotat cu o platformă inerţială. S.a notat cu (x_p, y_p)

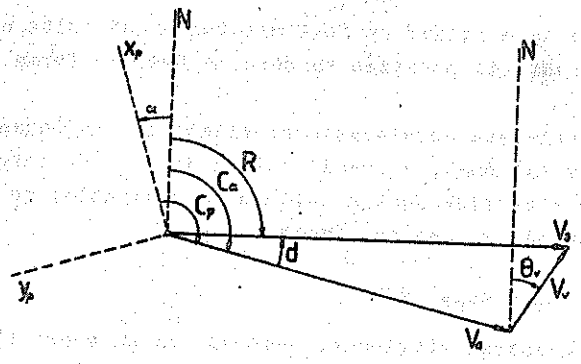


Fig. XV-1

sistemul de coordonate legat de platformă; astfel, α reprezintă azimutul platformei, iar C_p capul platformei. In continuare, C_a reprezintă capul adevărat, d deriva, θ_v direcţia vîntului, v_a viteza adevărată, v_s viteza faţă de sol, v_v viteza vîntului, R relevmentul.

Dintre aceşti parametrii, pot fi măsuraţi direct v_s (cu radar Doppler), α, v_a, C_p, restul rezultînd prin calcul.

Parametrii de ghidaj, pentru zborul pe ortodromă, sînt arătaţi în fig.XV.2. Se presupune că traectul (pe ortodromă) este reprezentat prin segmentul P_1P_2 ; la timpul t avionul ar trebui să se afle

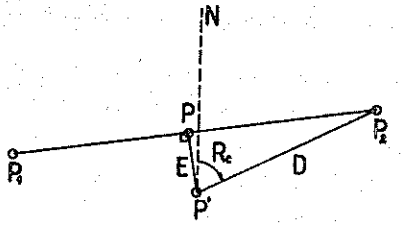


Fig.XV-2

.//.

în punctul P, dar din cauza perturbaţiilor se află de fapt în punctul P'. Atunci se determină ecartul ε egal cu distanţa PP', distanţa rămasă de parcurs D, traectul de urmat R_0, timpul necesar pentru a atinge punctul P_2, etc.

Intr-o primă aproximaţie pămîntul se consideră sferic; într-o mai bună aproximaţie se consideră elipsoid, cu axa ecuatorială a, axa polară b şi aplatisarea e, astfel încît

$$b = (1-e)a$$

Pentru "elipsoidul terestru internaţional" (de notaţie)

avem: $a = 6.378.388$ m ; $e = \frac{1}{297}$

Cu ajutorul sateliţilor au fost efectuate mai multe corecţii ulterioare, care au îmbunătăţit precizia cu care se descrie forma globului terestru.

In ceeace priveşte acceleraţia gravitaţiei, din cauza neuniformităţii cîmpului gravitaţional, g_r(real) diferă de g_{ref}(de referinţă), atît în modul cît şi în direcţie. Pentru calcule de navigaţie, se consideră o componentă orizontală g_0, astfel încît

$$g_r = g_{ref} + g_0$$

unde g_0 este un proces aleator, staţionar, centrat, cu un ecart tip de aproximativ $15 \cdot 10^{-6}$ şi o distanţă de corelaţie de cca 100 km.

Sistemele de referinţă mai uzuale în navigaţie sînt următoarele: geografic, geocentric, ortodromic, unipolar, iar pentru sateliţi : cilindrice, orbitale, heliocentrice, galactic , acestea din urmă putînd fi utilizate în unele cazuri şi în aviaţie.

In coordonate geografice poziţia avionului este dată de longitudinea G(faţă de meridianul Greenwich), latitudine L şi altitudine h.

.//.

In coordonate unipolare se procedează în modul următor (fig. XV-3).

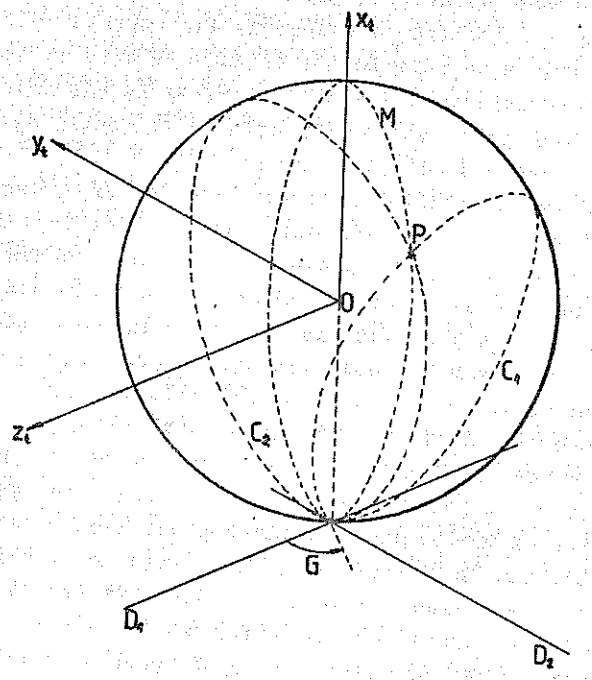


Fig. XV-3

Sistemul de referinţă x_t, y_t, z_t se ia astfel încît planul $y_t O\ z_t$ este planul ecuatorial, iar planul $x_t\ O\ z_t$ conţine meridianul Greenwich. Prin polul sud (sau nord) se duce o dreaptă D_1 paralelă cu Oz_t şi o dreaptă D_2 paralelă cu Oy_t. Pentru un punct oarecare P, longitudinea rezultă din unghiul G, determinat de intersecţia planului care conţine meridianul M, şi planul determinat de D_1 şi D_2. Dreapta D_1 şi punctul P determină un plan care intersectează sfera după cercul C_1. Dreapta D_2 şi punctul P determină un plan care intersectează sfera după cercul C_2. Se obţine astfel, pe sferă, un sistem de coordonate curbilinii, ortogonale; într-adevăr, pentru orice punct P dat, unghiul G şi cercurile C_1 şi C_2 sînt unice.

Rezultă un singur punct singular şi anume polul sud (sau nord).

Navigaţia în acest sistem de coordonate este mai avantajoasă decît în coordonatele geografice, deoarece la trecerea dintr-o emisferă în cealaltă (la traversarea ecuatorului) acest punct singular se comută în emisfera care este părăsită, astfel încît zborul peste pol nu întîmpină dificultate de calcul (altfel apare calculul tangentei unui unghi

.//.

care trece prin 90°).

Se pune acum următoarea problemă: un experimentator se află într-o capsulă complect izolată de exterior, iar capsula se deplasează prin raport cu un sistem de referinţă inerţial; se cere să se precizeze ce anume poate măsura experimentatorul, referitor la mişcarea capsulei. Evident că un asemenea procedeu de navigaţie ar fi ideal, deoarece nu ar necesita nici o legătură cu exteriorul.

Teoria relativităţii stabileşte însă că experimentatorul nu poate măsura decît rotaţia şi acceleraţia capsulei (de fapt măsoară forţe de inerţie specifice) şi nu poate măsura nimic altceva.

In practică, pe avioanele moderne este instalată o platformă inerţială care conţine 3 giroscoape cu cîte o intrare (sau două cu cîte două intrări) şi 2 sau 3 accelerometre, dispuse după 3 axe triortogonale. Această platformă poate fi stabilizată automat, astfel încît să rămînă tot timpul local orizontală; în această situaţie, platforma indică direct orientarea avionului şi acceleraţia. Un alt procedeu este fixarea platformei de corpul avionului (strap- down), în care caz însă giroscoapele trebue să urmărească rotaţii rapide, ceeace este dificil de realizat tehnologic. In ambele cazuri informaţiile furnizate de platformă sînt valabile pe termen limitat, deoarece atît accelerometrele cît şi giroscoapele dau erori care se cumulează în timp.

In consecinţă, navigaţia inerţială pură nu reprezintă o soluţie practicabilă decît în cazuri cu totul particulare.

Sistemele hibride, care utilizează platforma inerţială, la care se adaogă informaţii auxiliare dela centrala aerodinamică, radarul şi semnale radio dela surse exterioare, au cea mai mare răspîndire, datorită performanţelor ridicate pe care le realizează. Schema de principiu a unui astfel de sistem de culegere şi prelucrare a informaţiei este dată în fig. XV-4.-

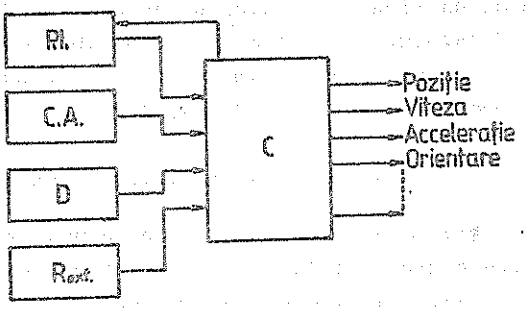


Fig.XV-4

Aci P.I. reprezintă platforma inerţială, C.A. centrala aerodinamică, D radarul Doppler, R_{ext} receptoare de semnale radio, C calculatorul. La ieşire se obţine poziţia avionului, viteza, acceleraţia şi orientarea (cu toate componentele)etc.; aceste informaţii sînt utilizate în schemele de pilot automat, iar unele sînt şi direct afişate la bord. La sistemele moderne, macheta avionului este reprezentată cu traectul de zbor şi harta, pe un ecran de bord.

Cantitatea de informaţie afişată la bord, situarea aparatelor pe ecran, modalitatea de afişare,etc. reprezintă o problemă de ergonomie a bordului.

In multe cazuri, schema din fig.XV-4 presupune filtrajul statistic (de exemplu un filtru Kalman- Bucy).

XV-3. Giroscopul

In sistemele automate de pe avion, giroscopul este reprezentat prin funcţia de transfer. In acest scop vom descrie giroscopul prin efectul giroscopic al ansamblului stator-rotor, considerate împreună ca "element sensibil" al traductorului giroscopic. O aceeaşi cutie conţine statorul şi rotorul, ansamblul fiind denumit "element sensibil"; statorul este fixat de cutie.

Rotorul se roteşte cu o viteză unghiulară Ω, constantă, în raport cu statorul (deci şi în raport cu cutia). Situăm elementul sensibil într-un sistem inerţial de referinţă şi notăm cu ω viteza de rotaţie a elementului sensibil în raport cu acest sistem inerţial. Momentul cinetic total este dat de

$$I\omega + I_R$$

unde I_R este momentul de inerţie al rotorului, în raport cu axul său de rotaţie (scalar), iar I este tenzorul de inerţie al elementului sensibil. Ecuaţia lui Euler se scrie atunci astfel:

$$\frac{d}{dt}(I\omega + I_R\Omega) = M$$

unde M este vectorul rezultant al cuplurilor exterioare aplicate. Deoarece s-a presupus Ω constant (în modul) avem

$$\frac{d}{dt} (I_R\Omega) = \omega \times I_R\Omega$$

unde derivata se calculează în raport cu sistemul inerţial ales. Rezultă atunci:

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M - \omega \times I_R\Omega$$

.//.

Interpretăm această ecuaţie în modul următor : o rotaţie de viteză unghiulară ω a elementului sensibil are ca efect apariţia unui cuplu suplimentar $-\omega \times I_R$ (cuplul giroscopic). Notăm cu

$$H = I_R\Omega \qquad \text{şi} \qquad u = \omega$$

şi cuplul giroscopic ia forma

$$y = -u \times H = H \times u$$

unde u este comanda giroscopului (viteza unghiulară în raport cu sistemul inerţial), H este momentul cinetic al giroscopului, iar y este ieşirea giroscopului (cuplu).

In sistemele automate se utilizează giroscoape cu două "grade de libertate" şi cu "un grad de libertate". Ca exemplu, un rotor sferic pe pernă de fluid permite măsurarea a două unghiuri în raport cu statorul, deci este cu două grade de libertate.

Un element sensibil care se poate roti în jurul unui singur ax realizează un giroscop cu un singur grad de libertate. Pentru un astfel de giroscop, convenţional se consideră intrarea u drept un unghi de rotaţie α, iar ieşirea un unghi de rotaţie β.

Luînd în considerare şi amortizarea vîscoasă introdusă de lichidul de flotaţie în care se află elementul sensibil, ecuaţia de mişcare este:

$$J\ddot{\beta} + b\dot{\beta} = M + H\dot{\alpha}$$

unde J este momentul de inerţie al elementului sensibil, $b\dot{\beta}$ este cuplul de frecare, M este cuplul imprimat de un motor, iar H este momentul cinetic, reprezentate în fig. XV-5.-

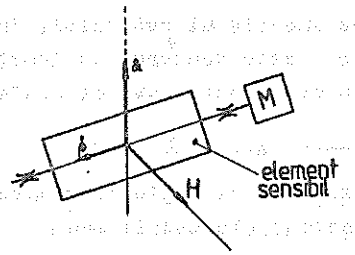


Fig. XV-5.

.//.

Introducem notaţiile

$K = \frac{H}{b}$ amplificarea mecanică a giroscopului şi

$T = \frac{J}{b}$ constantă de timp a giroscopului

Aplicînd transformata Laplace rezultă

$$\mathcal{L}\beta = \frac{K}{Ts+1}\mathcal{L}\alpha + \frac{1}{bs(Ts+1)}\mathcal{L}M$$

Exemple de valori tipice: T = 2 ms ; K=5; Ω =24.000 rot/min H=3.10^5 unităţi C.G.S, J = 125 C.G.S.

In lipsa motorului avem M=0 deci

$$\mathcal{L}\beta = \frac{K}{Ts+1}\mathcal{L}\alpha$$

In multe aplicaţii la avioane, dată fiind constanta de timp T$\cong$2 ms, foarte mică prin raport cu constantele de timp ce intervin în restul schemei, giroscopul se consideră un element proporţional, de amplificare K.

Pentru măsurarea vitezei de rotaţie $\dot{\alpha}$ (cazul girometrului) se alege

$$M = -a\beta$$

ceeace se realizează cu un traductor de unghi la ieşire şi um aplificator care alimentează motorul M. Se obţine

$$\mathcal{L}\beta = \frac{K}{Ts^2 + s + a/b}\mathcal{L}\dot{\alpha}$$

astfel încît la ieşire se măsoară unghiul cu care se roteşte elementul sensibil, în funcţie de viteza unghiulară imprimată la intrare. Pentru un raport a/b convenabil ales, dat fiind că T este mic, în multe aplicaţii şi în acest caz se poate considera girometrul ca un element proporţional, în primă aproximaţie.

Un exemplu de funcţie de transfer, pentru un giroscop inclus într-un pilot adaptiv este

$$\frac{62^2}{s^2 + 2\cdot(0,7)\cdot(62)s + 62^2}$$

Unecri practica necesită calcule mai exacte, ceeace face ca funcţia de transfer a giroscopului să nu fie prea departe simplificată.

La calculul erorilor trebue luate în considerare metodele de calcul statistic ; astfel, se poate alege următoarea caracteristică

$$x = Kx_a + \varepsilon$$

.//.

unde x_a este mărimea adevărată, x cea măsurată; K factorul de scară şi $\mathcal{E}$ deriva nulului, Atît K cît şi $\mathcal{E}$ sînt variabile aleatoare, dar într-o primă aproximaţie pot fi luate în calcul drept constante. Exemple:

$K = 1 \pm 10^{-3}$; $\mathcal{E} = 0{,}01^{0}$/oră. Atît $\mathcal{E}$ cît şi K dau erori care se cumulează în timp.

In funcţionare normală a giroscopului, se consideră ca derivă aleatoare orice derivă care nu este produsă de cauze măsurabile direct (de ex= cupluri parazite, echilibrări nesatisfăcătoare, anizoelasticităţi, etc). Pentru descrierea derivei aleatoare, una din posibilităţile utilizate frecvent este considerarea corelaţiei

$$\varphi_{\xi}(\tau) = \sigma^{2} e^{-\frac{|\tau|}{T}}$$

unde σ este ecartul tip. O altă posibilitate este descrierea derivei aleatoare prin ecuaţia diferenţială

$$\dot{\xi} = q\,\delta(t-\tau)$$

unde $q\,\delta(t-\tau)$ este varianţa unui zgomot alb.

Cele mai bune performanţe au fost realizate pînă în prezent de giroscoapele cu suspensie electrostatică. Totuşi, girolaserele prezintă unele avantagii importante, în special faptul că nu mai conţin piese în mişcare. Ele au intrat în exploatare în aviaţia civilă,din 1982.

Principiul girolaserului este arătat în fig. XV-6.

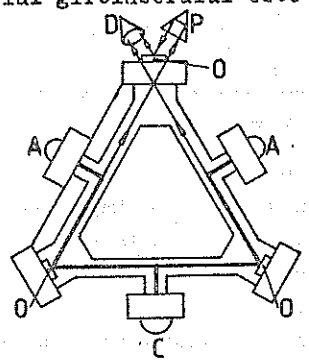


Fig. XV-6.

C este catodul, iar A anodele. Fasciculul monocromatic este reflectat de oglinzile O şi de prisma P. Un fascicul parcurge traseul în sens pozitiv, iar celălalt în sensul negativ de rotaţie. Cele două fascicule sînt recepţionate de detectorul D. La o mişcare de translaţie pură (fără rotaţie), detectorul indică zero. In cazul unei rotaţii în planul figurei, apare o diferenţă de frecvenţă între cele două fascicule,care depinde de viteza unghiulară. Ieşirea girolaserului este sub formă numerică,astfel încît unghiul de rotaţie se obţine prin numărarea impulsurilor (integrare numerică directă).

.//.

La primele variante de girolaser detectia lui zero se calibra imprimînd o rotaţie riguros constantă girolaserului. După circa 20 ani de cercetări, tehnologia girolaserului a progresat pînă la variantele statice cu ieşire numerică.

XV-4. Accelerometrul

Pentru determinarea funcţiei de transfer luăm ca exemplu un accelerometru pendular. Acesta se realizează în modul următor: elementul sensibil se echilibrează static şi dinamic cu mare precizie, astfel încît să devină insensibil la acceleraţii în orice direcţie. El este susţinut de lagăre cu frecare foarte mică, poate fi suspendat magnetic, etc. După ce s-a realizat echilibrarea se adaogă o cantitate de material (de exemplu aur) cu masa precis determinată şi la o distanţă de axul de rotaţie de asemenea precis determinată. Acum elementul sensibil se comportă ca un pendul plan; este necesar ca pendulul să fie foarte sensibil pe o direcţie şi cît mai puţin sensibil pe celelalte două direcţii perpendiculare. Astfel, se realizează un accelerometru cu o singură intrare.

Accelerometrele cu trei intrări sînt realizate de exemplu prin levitaţia magnetică sau electrostatică a unei sfere perfecte, ceeace permite determinarea acceleraţiei simultan pe cele trei componente. De obicei, platforma inerţială conţine trei accelerometre, dispuse cît mai exact după trei direcţii rectangulare.

Sub efectul acceleraţiei, mişcarea pendulului este sesizată de un traductor de poziţie, la ieşirea căruia este conectat un amplificator. Amplificatorul alimentează un motor liniar, care menţine pendulul foarte aproape de starea de repaos. Dat fiind că deplasările pendulului sînt foarte mici, deducem funcţia de transfer într-o formă simplificată, reprezentată în fig. XV-7.

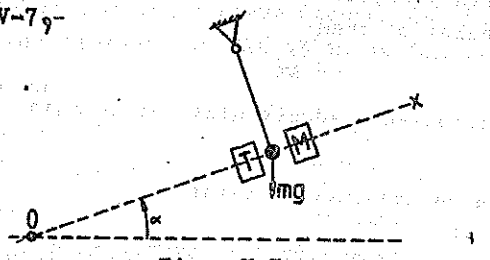


Fig. XV-7.

unde T este traductorul de poziţie iar M este motorul liniar.

Notăm cu x coordonata pendulului faţă de cutia accelerometrului şi cu X coordonata cutiei faţă de un reper inerţial (un punct pe direcţia Ox). Din cauza rigidităţii pendulului pe alte direcţii decît Ox, neglijăm celelalte efecte, ceeace în primă aproximaţie se verifică practic. Ecuaţia de mişcare o scriem în forma

$$m\ddot{x} + K\dot{x} = f_M - mg \cdot \sin\alpha - m\ddot{X}$$

.//.

unde Kx este forţa de frecare, f_M forţa imprimată de motor, iar mgsinα componenta gravitaţiei. Se observă dela bun început ca dacă $x \to 0$ avem aproximativ

$$f_M \cong m\ddot{X} - mg\sin\alpha \quad ; \quad \frac{f_M}{m} \cong \ddot{X} - g\sin\alpha$$

la variaţii lente ale lui X. Concluzia este că trebue eliminată componenta gravitaţională (cel mai recomandabil prin calcul, cînd α şi g sînt precis cunoscute, deoarece m a fost dimensionat cu mare exactitate), după care forţa motorului este proporţională cu acceleraţia de măsurat. Forţa motorului se măsoară indirect, de exemplu prin mărimile electrice aplicate motorului, ceeace permite atingerea unor performanţe ridicate. Unele din realizările de acest tip asigură un domeniu de măsurare a acceleraţiei dela 10^{-5}g la 10 g.

Presupunînd că a fost eliminată componenta gravitaţională, construim acum un model al accelerometrului de forma următoare

$$m\ddot{x} + K\dot{x} = f_M - m\ddot{X}$$

Aplicăm acum un reglaj după stare, adică alegem forţa motorului de forma

$$f_M = - ax - b\dot{x}$$

Introducînd în precedenta se obţine

$$m\ddot{x} + (K+b)\dot{x} + ax = - m\ddot{X}$$

Împărţind cu $m \neq 0$ se obţine

$$\ddot{x} + \frac{K+b}{m}\dot{x} + \frac{a}{m}x = -\ddot{X}$$

Citirea poziţiei elementului sensibil se face de exemplu la ieşirea traductorului şi avem

$$y = Ax$$

unde A este amplificarea traductorului de poziţie. Notăm intrarea cu

$$u = -\ddot{X}$$

adică acceleraţia de măsurat. Rezultă:

$$\ddot{y} + \frac{K+b}{m}\dot{y} + \frac{a}{m}y = Au$$

Aci K şi m sînt date, iar a,b şi A se dimensionează prin proiectare. Notînd soluţia elementară cu $\tilde{y}$ (în $\mathcal{D}'_+$) avem

$$y = \tilde{y} * Au = A\tilde{y} * u$$

Este evident acum că dacă $A\tilde{y}$ tinde către $\delta(t)$, atunci y

.//.

tinde către u, adică s-a realizat un accelerometru ideal. Pentru a constata care sînt limitările practice, aplicăm transformata Laplace şi avem

$$\mathcal{L}y = \frac{A}{s^2 + \frac{k+b}{m}s + \frac{a}{m}}\,\mathcal{L}u$$

Se vede că dacă $A = \frac{a}{m}$ avem eroare statică nulă, iar dacă în plus A şi a tind simultan către valori mari, $\mathcal{L}\tilde{y} \to 1$.

In ceeace priveşte amortizarea, ea poate fi dimensionată convenabil prin alegerea lui b. Alegere unei valori foarte mari pentru A şi a înseamnă amplificări mari şi lărgirea benzii de trecere a accelerometrului.

Cea mai importantă limitare este probabil creşterea puterii spectrale a zgomotului, odată cu creşterea lărgimii de bandă. Un exemplu de accelerometru realizat practic este următorul $\Delta f = 0 \div 120\ H_z$, ceeace asigură un răspuns foarte rapid. Din acest motiv, în multe scheme de pilot automat, accelerometrul este considerat element proporţional. Un exemplu de funcţie de transfer pentru un accelerometru ca cel studiat aci este:

$$\frac{(72o)^2}{s^2 + 2(o,7)(72o)s + (72o)^2}$$

In ceeace priveşte erorile, calculul se face cu metodele expuse anterior la giroscop. Astfel, pentru un accelerometru care măsoară 10^{-5} g, deriva nulului trebue să fie mult mai mică, iar factorul de scară să aibă variaţii corespunzătoare acestei condiţii. Un accelerometru dintr-o clasă mai frecvent întîlnită în aplicaţii, ar putea avea următoarele performanţe:

domeniul de măsurare	$\pm$ 20 g
deriva nulului	$\pm\ 10^{-4}$ g
sensibilitatea	5 mA/g.
ecartul factorului de scară	10^{-4}
banda de trecere	100 Hz

Accelerometrul are şi erori care se cumulează în timp, iar în unele cazuri conduce la procese de calcul inerent instabile. Să presupunem, de exemplu, că dorim să stabilim altitudinea avionului, cu un accelerometru care ar fi descris de ecuaţia

$$y = \ddot{h} + g$$

.//.

unde h este altitudinea avionului, în raport cu nivelul mării.

Stim însă că

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \approx g_0\left(1-2\frac{h}{R}\right)$$

unde g_0 este determinat la nivelul mării, iar R este raza sferei terestre. Avem atunci

$$\ddot{h} - 2\frac{g_0}{R}h = y - g_0$$

şi se observă imediat că soluţia fundamentală este instabilă. Cu metode numerice, calculul soluţiei acestei ecuaţii este şi el afectat de instabilitate. Chiar dacă se compensează efectul variaţiei lui g asupra accelerometrului, în practică metoda rămîne inutilizabilă.

In sistemele de ghidare a rachetelor sînt utilizate accelerometre pendulare giroscopice ; aci pendulul este elementul sensibil al giroscopului "excentricizat" convenabil. Efectul integrator al giroscopului are ca rezultat, după corecţia efectului gravitaţiei, obţinerea la ieşire a unui unghi proporţional cu viteza pe direcţia axei de sensibilitate (se spune, impropriu, "accelerometru integrator"). Aceste vitezometre sînt de mare precizie, pe termen scurt, ceeace la aplicaţiile pe rachete este foarte convenabil.-

Traductoarele de poziţie utilizate în acest gen de aplicaţii necesită performanţe ridicate ; realizările din acest domeniu cuprind şi un traductor realizat în IPB de autorul acestui curs. Acest traductor a fost publicat în 1962, la cererea revistei "Control Engineering", precum şi în cartea "Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice" de Turicin şi colaboratori (1968). Datorită sensibilităţii şi liniarităţii, precum şi a faptului că ieşirea este frecvenţa unui semnal, acest traductor este indicat în aplicaţii aerospaţiale. Principiul traductorului este arătat în fig. XV-7a. In acelaş corp este montată o bobină L, într-un miez din ferită, precum şi armătura plană (inelară) a unui condensator C. Celălalt corp conţine armăturile reciproce. La variaţia distanţei dintre armături variază simultan L şi C. Dacă neglijăm efectele de dispersie şi presupunem x suficient de mic, avem :

$$L \simeq \frac{k_1}{x} \quad ; \quad C \simeq \frac{k_2}{x} \quad ; \quad f \simeq \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = kx$$

Dacă x creşte mult frecvenţa tinde către o constantă,datorită parametrilor L şi C reziduali.Circuitul se conectează la un oscilator cu două borne de acces.Stabilitatea frecvenţei oscilatorului determină,în esenţă,calitatea traductorului.Pentru obţinerea unei stabilităţi ridicate a fost realizată o altă variantă,al cărei principiu este arătat în fig. XV-7b-Pe un suport foarte stabil la variaţii de temperatură(de ex. cuarţ) se aşează o bobină plană (prin depunere metalică).Astfel de tipuri de bobine sînt utilizate ca etaloane pentru inductanţe în metrologie.Două astfel de bobine sînt aşezate ca în fig. XV-7b,avînd grijă ca sensul de înfăşurare să fie acelaş la cele două bobine conectate în serie.Cele două bobine plane formează şi un condensator,care intervine cu capacitatea sa echivalentă,rezultînd un circuit LC.Ca în cazul precedent,acest circuit se conectează la un oscilator cu două borne de acces,proiectat astfel încît frecvenţa să depindă practic numai de L şi C.La exterior traductorul este ecranat cu straturi de ferită.Un prototip de acest gen,realizat practic,a dat o deviaţie de frecvenţă de 2oo kHz,corespuzător la 11 MHz poziţie iniţială,pentru o variaţie a distanţei dintre armături de loo μm,adică 2 kHz/μm.Pentru intervale de timp scurte,stabilitatea frecvenţei a rezultat de ordinul 10^{-6},ceeace înseamnă o eroare de derivă a nulului de o,oo5 %.Pentru termen lung,chiar pentru o stabilitate proastă a frecvenţei,de ex.10^{-5}, ar însemna erori ale lui zero de ordinul o,5 %.Cu metode de punere la zero această eroare de derivă poate fi înlăturată,dar rămîne efectul erorilor factorului de scară.

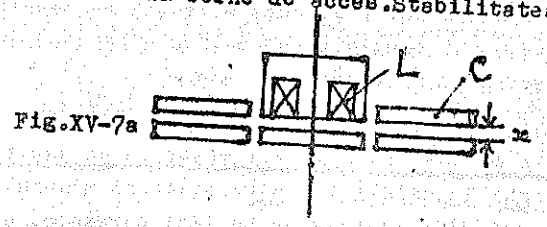
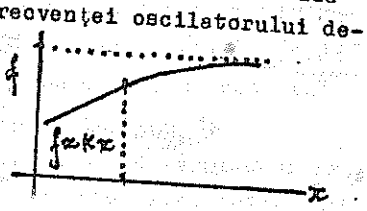


Fig.XV-7a



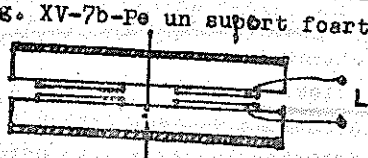


Fig. XV-7b

O aplicaţie practică a acestui traductor,la Fac. de Aeronave, a fost realizarea unui tester pentru măsurarea impulsului la micromotoarele rachetă,cu afişare numerică a impulsului.

XV-5 Platforma inerţială

Pe nucleul platformei se montează (cu mare precizie) trei accelerometre pe trei direcţii rectangulare şi trei giroscoape, atît accelerometrele cît şi giroscoapele avînd o singură direcţie de sensibilitate. Evident, pot fi montate numai două giroscoape, cu cîte două intrări, sau un singur accelerometru cu trei intrări, etc.-

* Nucleul platformei se roteşte în jurul unui ax, denumit axa de azimut. Pe acest ax este montat rotorul unui motor la un capăt şi rotorul unui detector de unghi la celălalt capăt. Statorul motorului şi statorul detectorului de unghi sînt montate pe un inel cardanic, denumit inelul interior. Atît motorul cît şi detectorul constituie totodată şi lagărele de susţinere a nucleului.

* Detectorul de unghi fixat pe inelul interior este detectorul de azimut.

(1) Inelul interior se roteşte faţă de inelul intermediar, axul respectiv determinînd axa de ruliu interior ; se repetă acelaş principiu, astfel încît detectorul acesta este detectorul de ruliu interior.

(2) Inelul intermediar se roteşte faţă de inelul exterior; detectorul de unghi al inelului intermediar este detectorul de tangaj.

(3) Inelul exterior se roteşte faţă de suportul solidar cu avionul ; rotaţia acestui inel este măsurată de detectorul de ruliu exterior.

Platforma se iniţializează în poziţie canonică ; prin reglaj, orice orientare ar avea avionul, nucleul se menţine local orizontal. Faptul că platforma se realizează cu patru axe de rotaţie (deci redondant), are următoarea explicaţie: pentru orice orientare a avionului axa de ruliu interior se roteşte numai cu $\pm 15^{0}$, iar axa de tangaj cu $\pm 110^{0}$, celelalte două axe fiind complect libere. Legăturile electrice se realizează prin conductori (la cele două inele cu cursă limitată) şi prin inele colectoare (problemă tehnologică delicată) pentru axele care se rotesc nelimitat.

In general, realizarea unei platforme inerţiale este o problemă tehnologică de vîrf.

In fig XV-8 se reprezintă schematic platforma cu patru axe de rotaţie. Aci N este nucleul, iar 1, 2,3, sînt cele trei inele

.//.

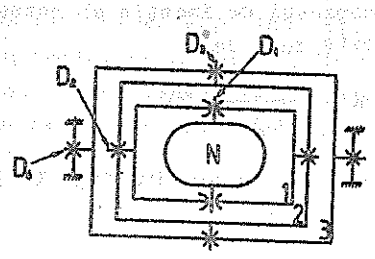


Fig. XV-8

cardanice. 1 interior, 2 intermediar, 3 exterior. Detectoarele de unghi sînt: D_1 azimut, D_2 ruliu interior, D_3 tangaj, D_4 ruliu exterior.

Platforma are un reglaj termic, cu următoarele performanţe impuse: temperatura lichidului de flotare trebue menţinută la 70 ± 0,2°C pe termen lung, iar gradientul de temperatură, în lichid, să nu depăşească 0,2°C în tot volumul lichidului (altfel apar erori importante cauzate de gradientul de temperatură).

Din punct de vedere al zborului, ne interesează mai mult reglajele care intervin la iniţializarea platformei cît şi cele care asigură poziţia local orizontală a nucleului, la orice orientare a avionului.

Pentru iniţializare considerăm schema din fig. XV-8 în care notăm cu α unghiul rotorului faţă de stator la oricare din inele. Detectorul de unghi se consideră un element proporţional, care la ieşire dă un semnal electric

$$e_D = A_1 \alpha$$

Motorul (de obicei motor cu magnet permanent, de curent continuu) îl descriem prin impedanţa sa

$$Z_M = R + pL$$

prin amplificarea tensiune-cuplu A_2 şi prin t.c.e.m.

$$\mathcal{L} e_T = A_3 s \mathcal{L} \alpha$$

.//.

Notînd cu J momentul de inerţie al rotorului, funcţia de transfer cuplu - unghi este dată de

$$\mathcal{L}\alpha = \frac{1}{sJ}\mathcal{L}M$$

Cu acestea, rezultă schema din fig. XV-9 unde M_p este un cuplu perturbator.

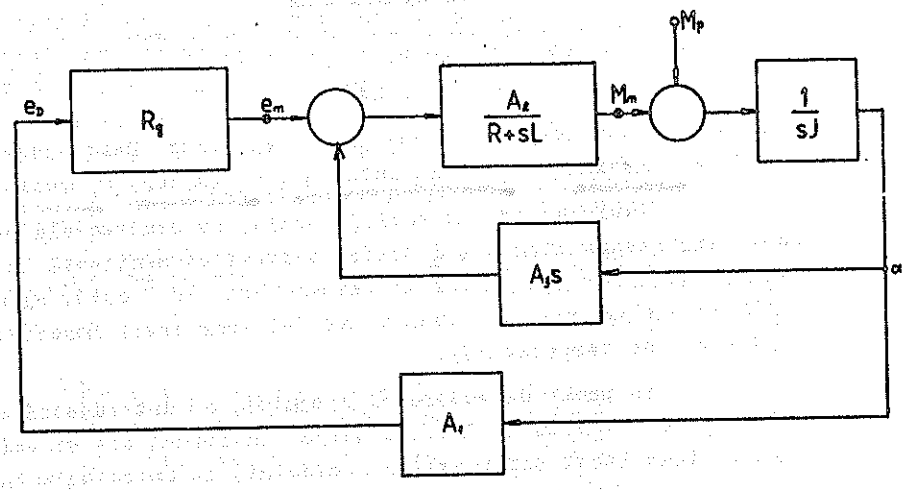


Fig. XV-9.

Aplicaţie: să se proiecteze regulatorul R_g, punînd $M_p = 0$, $\alpha(t=0) = \alpha_0 = \frac{\pi}{11}$, astfel încît inelul respectiv să fie adus la $\alpha(t \to \infty) < 0{,}1°$, iar durata regimului tranzitoriu să fie mai mică de 5 secunde (pentru valori A_1, A_2, A_3, R, L şi J alese corespunzător unei platforme).

* * *

După iniţializare, calculatorul efectuiază mici programe de verificare, utilizînd informaţii şi dela alte surse decît platforma (de exemplu, dacă avionul este uşor înclinat, aceasta se verifică cu verticala locului şi poziţia canonică a platformei).

In poziţie canonică, toate detectoarele de unghi indică zero; dacă blocul inerţial este aşezat orizontal, atunci în poziţie canonică axa de azimut este verticală, iar axele accelerometrelor pentru x şi y se află în plan orizontal.-

.//.

După ce platforma a fost aşezată în poziţie canonică, se trece la reglajul platformei după indicaţiile giroscoapelor. De obicei, fiecare inel este reglat pe un canal independent. De aceea, ca şi în cazul iniţializării, descriem un singur canal; cel mai simplu este cel care reglează axa de azimut. Dacă neglijăm tensiunea contra-electromotoare a motorului, avem

$$\mathcal{L}M_m = \frac{A_1}{R+sL}\mathcal{L}e_m$$

unde M_m este cuplul motorului. Funcţia de transfer a giroscopului o considerăm cu unghiul α ca intrare, iar cu ieşirea c.t.e.m, proporţională cu unghiul β.

Unghiul β al flotorului (elementului sensibil) al giroscopului este transformat într-o tensiune electrică, prin detectorul de unghi al giroscopului. Putem considera deci:

$$\mathcal{L}\beta = \frac{\mathcal{L}e_g}{A_2}$$

La orice rotaţie cu un unghi α, considerat în sistemul inerţial în care a fost iniţializată platforma, motorul trebue să rotească inelul platformei astfel încît axa de azimut să fie menţinută cu orientarea iniţială. Se obţine schema de principiu din fig. XV.1o.

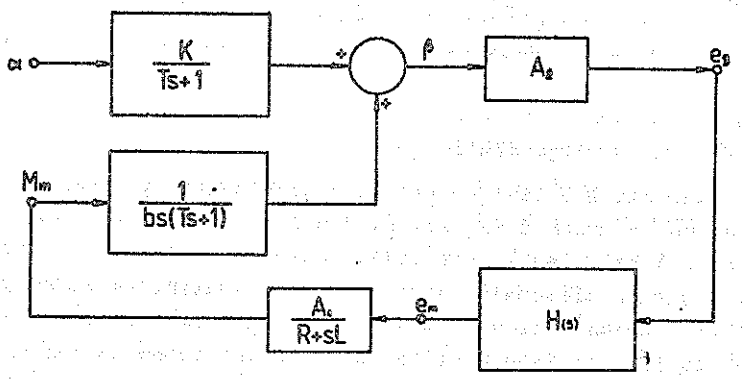


Fig. XV.1o

Blocul notat cu H(s) conţine o schemă electronică, rezultată din proiectare; în practică se obţin erori statice între 1o-2o secunde de arc în azimut. Pentru ruliul interior şi tangaj, schemele sînt similare, realizîndu-se erori statice de cîteva secunde de arc.

.//.

Axul exterior este reglat după detectorul său de unghi; aceasta înseamnă că platforma este reglată astfel încît cele trei axe interioare să formeze un triedru trirectangular, iar axa exterioară să fie menţinută în poziţie canonică. O analiză mai detaliată arată că acest reglaj este posibil, pentru orice orientare a avionului (aceasta se poate realiza numai cu patru cardane).

In varianta "strapdown" se renunţă la platforma stabilizată, accelerometrele şi giroscoapele fiind imobile faţă de avion. Mai există şi variante strapdown la care se introduce o stabilizare cardanică (de exemplu pe azimut).

Schema de principiu a navigatorului "strap- down" este arătată în fig. XV-11.-

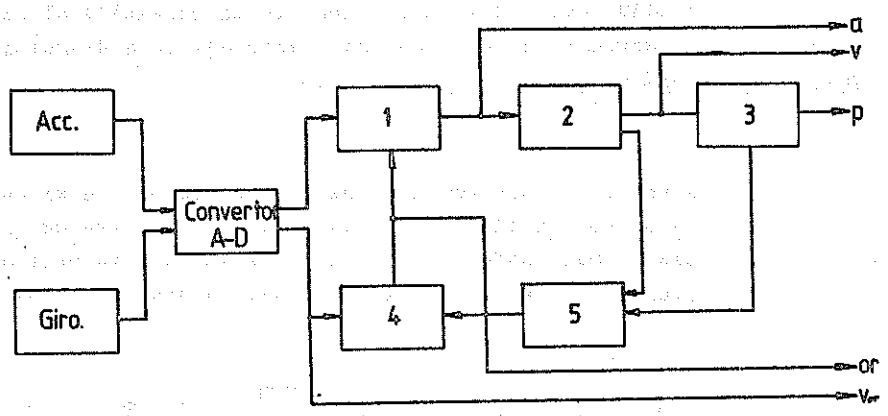


Fig. XV-11

1 reprezintă blocul de calcul a acceleraţiei, corectat cu 4 - - blocul de calcul al orientării. Blocul 2 calculează viteza, iar blocul 3 poziţia. Blocul 5 calculează momentele, necesare în 4 pentru calculul de orientare. Ieşirile sistemului sînt : a= acceleraţia, v= viteza, p = poziţia, or - orientarea v_{or} = vitezele unghiulare de orientare. Performanţele pot fi mult îmbunătăţite, dacă se introduce un reglaj cardanic după azimut.

Utilizarea microprocesoarelor şi a girolaserului poate contribui sensibil la îmbunătăţirea performanţelor. Iată acum cîteva exemple, asupra performanţelor realizate: sistemele inerţiale care utilizează giroscoape cu suspensie electrostatică, în varianta cu platformă stabilizată, realizează o,1 mile nautice pe oră eroare. O variantă strapdown, cu giroscoape electrostatice, dar cu stabilizarea azimutului,realizează o

.//.

eroare de 0,4 m.n/oră. Acelaş sistem inerţial în varianta strapdown dar fără nici o stabilizare cardanică, realizează circa 1 m.n/oră.

Prin utilizarea girolaserului şi a acceleorometrului linear, într-o variantă de exploatare în aviaţia civilă, de tip strapdown (fără nici o stabilizare cardanică) asigură o acurateţă de cca 2,5 m.n/oră.

Avînd microprocesoare ataşate, acest sistem furnizează următoarele informaţii:

- orientarea avionului (atitudinea), utilizată de pilotul automat şi afişată la bord;
- acceleraţii lineare şi viteze unghiulare, pentru zborul automat;
- vectorul viteză, necesar zborului automat, detecţia perdelelor de vînt, precum şi pentru controlul optimal al consumului de energie;
- capul magnetic, pentru afişare şi pentru zborul automat;
- parametrii de ghidaj pe termen lung.

Progresele tehnologice în domeniul realizării sistemelor de referinţă inerţiale au în vedere următoarele:

- utilizarea circuitelor integrate de viteză foarte mare (VHSIC) precum şi a celor ultra VHSIC;
- arhitectură modulară bazată pe chips-uri;
- integrarea funcţională într-un sistem global;
- creşterea fiabilităţii

Cu titlu de exemplu, menţionăm că se fac eforturi pentru a realiza un chip echivalent cu 10^6 tranzistoare (cu 660.000 este deja realizat).

Pentru schemele logice obiectivul este să se ajungă la un chip care conţine 20.000 porţi logice. Aceste condiţii sînt specifice utilizării în avionica numerică (digital avionics).

Deoarece în navigaţia inerţială se cumulează în timp erori aleatoare, unul din criteriile de apreciere a performanţei pentru întreg programul de zbor este " Cercul de Egală Probabilitate" (CEP). Acest cerc are centrul în punctul în care trebue să ajungă avionul, iar raza calculată astfel încît avionul să ajungă în cerc cu probabilitatea 1/2 (deci cu aceeaş probabilitate în afara cercului). In cazul în care erorile cumulate depind de direcţia de zbor, se utilizează "Elipsa de Egală Probabilitate" (EEP).

.//.

XV-6. Sisteme de radionavigaţie.

In principiu, pentru navigaţie şi ghidaj, poziţia şi orientarea avionului este dată de sistemul inerţial atunci cînd legătura radio cu solul nu este posibilă.

Din acest motiv, la traversarea oceanelor ICAO recomandă utilizarea sistemului de referinţă inerţială fie stabilizat fie strapdown.

Pentru zborul deasupra solului, navigaţia se bazează pe instalaţiile VOR şi DME care constituie în prezent osatura pentru aviaţia civilă.

Iniţalele VOR provin dela "Very high frequency Omnidirectional Range". Această instalaţie a devenit standard internaţional în 1945. VOR operează în banda 108-118 MHz, cu canalele distanţate la 100 KHz. Mai recent, prin îmbunătăţirea stabilităţii frecvenţei şi a selectivităţii receptoarelor dela bord, numărul de canale a putut fi dublat, prin separare la 50 KHz.

Principiul de funcţionare VOR este următorul: sistemul radiant dela sol emite un fascicol cardioid care se roteşte cu 30 rot/sec, generînd un semnal periodic de 30 Hz la ieşirea receptorului dela bord. Simultan, sistemul radiant dela sol emite un semnalomnidirecţional care este modulat cu semnalul de referinţă de 30 Hz.

Receptorul dela bord detectează diferenţa de fază dintre cele două semnale de 30 Hz.

Această diferenţă de fază depinde de direcţia dată de poziţia avionului şi de poziţia sistemului radiant dela sol. In plus, semnalul omnidirecţional conţine o modulaţie care realizează o comunicaţie prin voce şi un semnal Morse pentru identificarea staţiei dela sol. Semnalul de referinţă şi cel rotativ apar în fază cînd avionul se găseşte pe direcţia Nord faţă de staţia dela sol. Pentru orice altă direcţia unghiul $0 \leq \varphi \leq 360^0$ este dat de diferenţa de fază. Pentru acurateţă, cele două semnale de 30 Hz dela sol provin dela aceeaş sursă, astfel încît eventualele variaţii ale frecvenţei acestei surse nu afectează diferenţa de fază. La început fascicolul rotitor era produs prin rotirea elementului radiant. In prezent acest fascicol rotitor este realizat de un sistem radiant imobil, cu patru bucle alimentate astfel încît rezultanta lor să constitue un fascicul care se roteşte cu viteza de 30 rot/sec.

Sistemul de afişare dela bord preia semnalul dela receptor şi afişează direct unghiul faţă de traseul programat, pe o scară care indică $\pm 10^0$. Acurateţa instrumentală a VOR-ului este de ordinul $\pm 1^0$ eroare. Sursa principală de erori este propagarea; dacă staţia dela sol este amplasată în condiţii dificile de relief, sau de neregularitate, care pot da reflexii (copaci, clădiri, etc) erorile pot ajunge la $\pm 15^0$, ceeace este inacceptabil. In aceste cazuri staţia trebue mutată în alt loc,

.//.

unde terenul este neted pe o rază de cel puţin 500 m faţă de sistemul radiant.

O reducere substanţială a erorilor o realizează sistemul VOR-Doppler. Pe un cerc cu diametrul de cca 15 m. sînt dispuse 52 bucle radiante, iar în centrul cercului o singură buclă. Elementul radiant central emite semnalul omnidirecţional modulat cu 30 Hz de referinţă. Cele 52 bucle de pe cercul exterior sînt alimentate succesiv prin comutaţie electronică, astfel încît simulează un singur element radiant care s-ar roti pe cercul cu raza de cca 7,5 m. Viteza de rotaţie este de 30 Hz, obţinută dela aceeaş sursă care generează semnalul de referinţă. Viteza periferică a elementului radiant este de ordinul a 1400 m/s. Efectul Doppler apare deoarece cînd elementul radiant se "apropie" de receptor, frecvenţa recepţionată este mai mare, iar cînd se "depărtează" frecvenţa scade. Acest efect este utilizat la măsurarea diferenţei de fază. Pentru o staţie cu un amplasament corect experienţa a arătat că pentru un zbor orbital la 20 mile de staţie, eroarea este redusă dela $2,8^{0}$ cu un VOR, la $0,4^{0}$ cu un VOR- Doppler.

S-au mai făcut unele studii şi experienţe de îmbunătăţire a performanţelor, ca de exemplu:

- cele 52 de antene să fie dispuse în 13 grupe de cîte 4, pentru a produce 13 fascicole rotitoare, ceeace oferă o mai bună precizie a detecţiei de fază;
- mărirea frecvenţei de 30 Hz la 53 Hz (VOR de precizie);
- realizarea acestui VOR de precizie într-un VOR-Doppler.

Pe această cale se poate obţine o eroare în exploatare de $\pm 0,25^{0}$. Această soluţie nu are însă perspective de răspîndire, deoarece necesită modificarea receptoarelor dela bord; pe de altă parte, eroarea tehnică de zbor este de $\pm 1^{0}$ faţă de traectoria zborului programat.

Echipamentul denumit DME (Distance Measuring Equipment) permite măsurarea distanţei dela avion la staţia DME dela sol. Principiul de funcţionare este următorul: antena de emisie de pe avion trimite un impuls de "interogare" către "transponderul" dela sol. Acest impuls, recepţionat la sol, este întîrziat cu un timp fixat la 50 μs, după care este retransmis la receptorul de pe avion.

Impulsul de interogare este modulat în poziţie lent, corespunzător unei întîrzieri pe care ar realiza-o dacă s-ar afla la o distanţă dela 0 la 300 mile. In momentul în care impulsul de interogare se suprapune cu impulsul de răspuns, se calculează timpul necesar şi de aci rezultă distanţa. Frecvenţa de repetiţie a impulsului de interogare este astfel aleasă încît avionul să nu-şi schimbe prea mult poziţia. Impulsurile, care apar dela alte avioane sînt eliminate prin repetarea periodică a interogării, după ce distanţa a fost stabilită prin căutare.

.//.

Pentru căutare frecvenţa de repetiţie a impulsului este de 150 perechi pe secundă; după ce răspunsul a fost identificat, frecvenţa de repetiţie este de 5 ÷ 25 perechi pe secundă. In timpul căutării, viteza de modulare în poziţie a impulsului integrator corespunde unei viteze de 10 mile pe secundă. La această viteză poate fi necesar un timp de căutare de 30 s. pentru distanţa de 300 mile. Cu circuite mai perfecţionate, această viteză de căutare a fost mărită, ajungîndu-se ca timpul de căutare să fie sub o secundă, dela distanţa de 300 mile. După determinarea răspunsului, impulsul de interogare este modulat în poziţie în jurul timpului de răspuns. Reducerea frecvenţei de repetiţie a impulsului de interogare în regimul de afişare a distanţei este posibilă deoarece în intervalul dintre două interogări poziţia avionului se schimbă foarte puţin. In rezumat deci DME realizează:

1. recunoaşterea răspunsului şi eliminarea impulsurilor parazite (searching)

2. convertirea semnalelor interogare - răspuns în distanţă şi afişarea rezultatului (tracking).

Recomandarea ICAO pentru acurateţa DME este de ± 0,5 mile, ceeace este corespunzător pentru echipamentele actuale.

Impulsurile de interogare sînt transmise pe una din cele 126 frecvenţe situate între 1025 şi 1150 MHz, la distanţă de 1 MHz. In orice direcţie dela staţia de pe sol, în zona de undă directă, apar 126 fascicule emise, fiecare dintre ele putînd răspunde la 100 avioane. Viteza de transmitere poate asigura însă şi un trafic mai intens decît aceasta.

Combinarea în acelaş loc pe sol a unui VOR şi a unui DME realizează o staţie VOR/DME, ceeace permite avionului să stabilească simultan unghiul dat de VOR şi distanţa dată de DME.

Sistemul de navigaţie DME/DME prezintă avantajul unei mai mari acurateţe în stabilirea poziţiei, deoarece se afişează distanţele faţă de două puncte cunoscute, sau mai multe. Se realizează un CEP cu raza de 200 m.

Alte sisteme de navigaţie bazate pe transmisii radio sînt LORAN, TACAN, VORIAC, DECCA, etc. în diferite variante.

Un sistem de radio-navigaţie care îşi propune să asigure determinarea poziţiei în orice zonă de zbor pe glob este OMEGA. Acest sistem conţine 8 staţii de emisie, care utilizează frecvenţe cuprinse între 10 şi 14 KHz- Aceste frecvenţe audio corespund unor lungimi de undă mari, ceeace asigură difracţia astfel încît în orice punct dela suprafaţa globului sînt recepţionabile cel puţin 3 staţii din cele 8. La aceste lungimi de undă, problema antenelor este foarte laborioasă. In schimb, OMEGA poate asigura poziţionarea vapoarelor şi submarinelor, deoarece atenuarea prin apă este circa 4,5 dB/km. Principiul de funcţionare este

următorul : fiecare stație emite impulsuri cu durata de 1 secundă, cu perioada de repetiție de 1o secunde. Prin identificarea a trei stații, poziția navei este stabilită pe o hartă hiperbolică.

Sistemul OMEGA a fost completat cu încă 9 stații de comunicații pe frecvențe foarte joase VLF (Very Low Frequency). Sistemul OMEGA VLF asigură o acuratețe de 1 milă în cursul zilei și 2 mile noaptea.In timpul exploziilor solare apar erori de scurtă durată care pot atinge 2o-3o mile. Receptoarele de la bord sînt realizate integrat, cu microcalculator, astfel încît se afișează direct poziția avionului în latitudine și longitudine. "Zona" în care se află avionul este mai precis determinată dacă receptorul este mai complex, dar se ridică costul.-

Sistemul NAVSTAR, în curs de realizare, va utiliza în varianta finală 24 sau mai mulți sateliți cu orbită de 12 ore, situate în trei planuri orbitale. Cînd sistemul va fi operațional, un avion situat oriunde în atmosferă, va recepționa simultan semnalele dela 6 la 1o sateliți din constelația NAVSTAR. Receptorul dela bord selecționează 4 din acești sateliți, cu un program de optimizare, care minimizează erorile. Calculele se fac în 4D, adică trei coordonate și timpul. Rezultatul este localizarea punctului de recepție în interiorul unei sfere cu raza de 1o m. Aceasta este o rezolvare radicală a problemei navigației și ghidajului, singurele probleme pentru aviația civilă sînt de ordin economic.

NAVSTAR utilizează un cod pseudoaleator pe două frecvențe, 1575,4 MHz și 1227,6 MHz, ceeace permite calibrarea întîrzierii introduse prin propagarea prin ionosferă. Datele sînt modulate pe purtător cu viteza de 5o bit/secundă, cu o lungime a mesajului de 15oo bit(3o secunde). Datele conțin și corecții cu privire la poziția satelitului, la timpul măsurat cu ceasul de pe satelit, etc.

Odată cu miniaturizarea și scăderea costului circuitelor integrate digitale, receptoarele se dezvoltă în direcția reducerii substanțiale a costului, ceeace ar asigura o răspîndire rapidă a acestui sistem de navigație.

Radarul Doppler este utilizat pentru măsurarea vitezei avionului față de sol; a fost însă realizat și un sistem de navigație Doppler. Principiul efectului Doppler este următorul: dacă o sursă emite un semnal de frecvență f, receptorul recepționează un semnal cu o frecvență care depinde de viteza relativă sursă-receptor. Variația frecvenței pentru viteze relative mici față de viteza de propagare a semnalului este bine aproximată cu formula

$$\Delta f = \frac{V_R}{\lambda}$$

unde V_R este viteza relativă (pozitivă cînd receptorul se apropie de sursă

.//.

iar λ este lungimea de undă a semnalului emis. Deoarece

$$\lambda f = c$$

unde c este viteza de propagare, avem şi

$$\Delta f = \frac{V_R f}{c}$$

Observăm că variaţia frecvenţei este dată de o formulă analoagă cu $\lambda f=c$, adică $\lambda \Delta f = V_R$ (lungimea de undă x frecvenţă= viteză). Deoarece semnalul emis are de obicei λ = const, rezultă că variaţia de frecvenţă este proporţională cu viteza relativă. Dacă λ este cunoscut şi Δf este măsurat, atunci se cunoaşte V_R. Emiţătorul de la bord emite un fascicul înclinat cu 10^0- 15^0 faţă de verticală. Datorită neregularităţilor solului, receptorul dela bord recepţionează unda reflectată; de observat că dacă suprafaţa solului ar fi un plan ideal (sau o oglindă perfectă), atunci receptorul nu ar recepţiona nici un semnal,deoarece unda reflectată în aceste condiţii se propagă cu acelaş unghi de incidenţă. Aşadar, semnalul recepţionat este un semnal aleator, depinzînd de neregularităţile solului, care dau reflexie în direcţia receptorului. Aceasta este explicaţia faptului că radarul Doppler dă rezultate slabe, în cazul zborului deasupra unei ape liniştite.

Navigatorul Doppler prezintă unele avantagii ca:

- indică viteza faţă de sol ca viteză medie, continuu în timp. Sistemele mai evoluate indică vectorul vitezei, prin trei componente, v_x, v_y, v_z. De aci se poate deduce şi poziţia faţă de sol, prin integrare
- nu necesită staţii de sol, astfel încît întreaga instalaţie este pe avion;
- sistemul dă rezultate oriunde pe glob şi nu depinde de condiţiile atmosferice, exceptînd cazul ploilor abundente
- radarul Doppler are o mare fiabilitate şi un consum redus.

Dezavantajele mai importante sînt:

- este dependent de informaţia asupra azimutului (dela compasul giromagnetic, dela platforma inerţială sau dela un astrocompas);
- pentru atitudine (tangaj şi ruliu) necesită o referinţă exterioară, pentru a da viteza în coordonatele dela sol;
- poziţia determinată cu Doppler cumulează erori în timp;
- viteza instantanee este determinată uneori cu erori mari; în schimb viteza medie este dată cu o bună acurateţă.

Dispunerea fasciculelor radarului Doppler, pentru cazurile tipice, este arătată în fig. XV-12.-

.//.

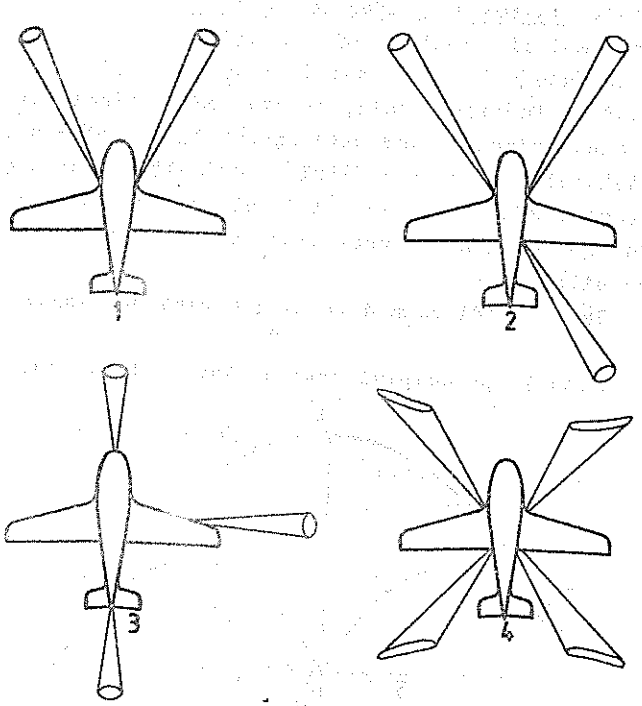


Fig. XV-12.

Figura 1 reprezintă o dispunere în V a fasciculelor, numai în direcţia înainte. Figura 2 reprezintă o configuraţie Janus λ. Denumirea "Janus" este preluată mitologia romană (Janus avea un ochi şi în spate). Figura 3 reprezintă o configuraţie Janus T, iar figura 4 o configuraţie Janus X. Ultima are şi o formă a fasciculului care amplifică unda utilă reflectată. O schemă bloc pentru navigatorul Doppler este dată în fig. XV-13.

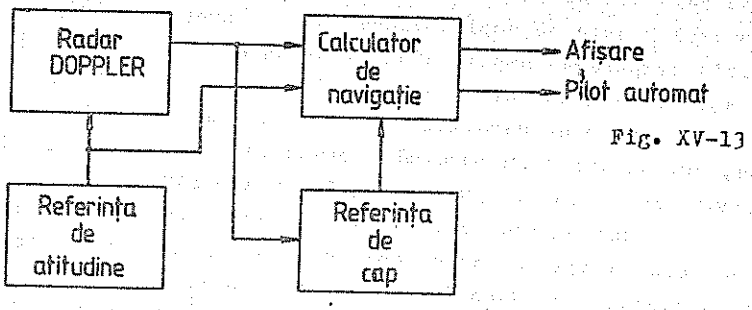


Fig. XV-13

.//.

XV-7. Sisteme de ghidaj la aterizare

Sistemul ILS (Instrument Landing System) se compune din 2 sau 3 markere, un fascicul pentru pantă şi un fascicul pentru direcţie. Markerul este un fascicul conic, cu axul pe verticală şi vîrful la antena de emisie. Primul marker este aşezat la 4,5 mile distanţă pînă la pragul pistei, al doilea la punctul unde înălţimea de decizie este de cca. 75 m. (categoria I-a), iar cel de al treilea la 30 m. înălţime de decizie (categoria II-a). Aceste trei puncte au rolul de puncte de control pentru pilot.

Panta şi directa date de ILS sînt realizate pe acelaş principiu.

Sumar, principiul este arătat în fig. XV-14. Curba A este

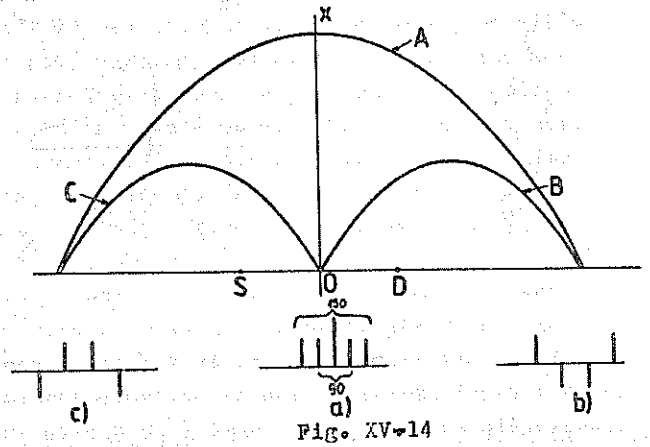


Fig. XV-14

polara de radiaţie a antenei pentru purtătoarea modulată cu 90 şi cu 150 Hz.

Spectrul ei conţine 5 frecvenţe (purtătoarea plus benzile laterale), reprezentate convenţional (a). Fasciculul B este radiat cu benzile lui 150 în fază cu cele din A, iar cu benzile lui 90 în opoziţie cu cele din A. Purtătoarea este eliminată, astfel încît rezultatul în punctul D este că amplitudinea lui 150 creşte, iar cea a lui 90 scade. Prin compararea amplitudinilor semnalelor de 90 şi 150 Hz se obţine indicaţia că avionul este deplasat în dreapta faţă de axa de ghidaj Ox (deoarece predomină semnalul de 150 Hz). Fasciculul C realizează reciproca, astfel încît în punctul S predomină semnalul de 90 Hz. In axa Ox semnalele de 50 şi 150 sînt egale în amplitudine.

Suprapunerea celor trei fascicule radiate realizează de fapt o modulaţie în spaţiu, care depinde de amplitudinea şi faza semnalelor care se suprapun. Acestea la rîndul lor depind de condiţiile de propagare (unde reflectate, condiţiile de propagare care depind de natura

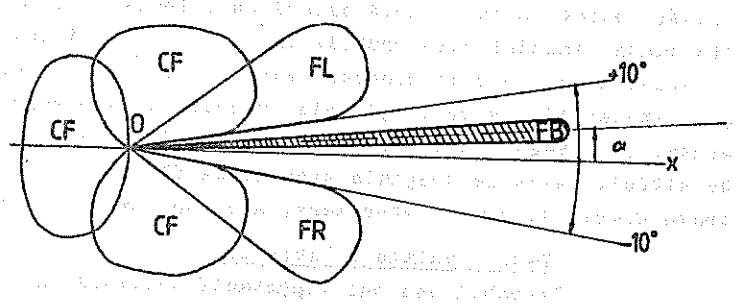
.//.

solului,etc.)

Aceasta are drept rezultat deformarea liniei de ghidaj atît pentru pantă, cît mai ales pentru direcţie. Pe de altă parte ghidajul se face după o direcţie fixată (de exemplu pentru pantă la un unghi de $2^{o} - 3^{o}$ faţă de planul orizontal). Un alt neajuns al ILS-ului este faptul că nu este util în ultima fază a aterizării, astfel încît în practică nu se poate utiliza pentru categoria III-a de aterizare. Toate acestea, plus alte dezavantagii fac ca ILS să nu mai corespundă cerinţelor aviaţiei moderne, în prezent fiind considerat complect uzat moral. De altfel, prima variantă comercială ILS a fost demonstrată în 1939 şi a devenit atandard ICAO în 1949, ceeace explică marea sa răspîndire la ora actuală.

In viitor sistemul ILS va fi înlocuit de MLS (Microwave Landing System); principiul ghidării avioanelor la aterizare cu un fascicul care baleează orizontul, furnizînd o referinţă de timp (Time Reference Scanning Beam) a primit în 1977 recomandarea comisiei AWOP (All-Weather Operational Panel) pentru ICAO, în scopul de a deveni noul standard.

Principiul MLS-ului este arătat în fig. XV-15.



XV-15

Cele trei fascicule CF indică pilotului "Cursa Falsă". Fasciculul FL indică pilotului să vireze spre stînga, respectiv FR spre dreapta. Cînd avionul a intrat în unghiul de $\pm$ 10°, recepţionează fasciculul FB care baleează acest unghi cu viteza riguros constantă; evoluţia acestui fascicul în timp este periodică, reprezentată în fig-XV-16.

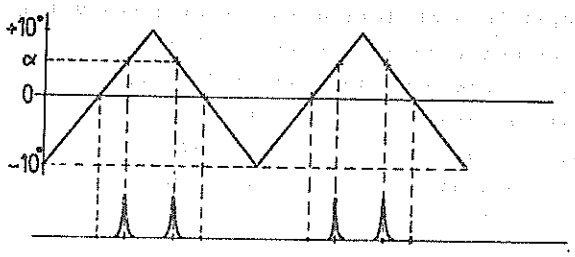


Fig. XV.16

.//.

Dacă avionul se află la un unghi α față de axa Ox, receptorul dela bord recepționează impulsurile reprezentate în XV-16, modulate în poziție în funcție de unghiul α. Atunci cînd avionul se află pe axa Ox, impulsurile apar la intervale de timp egale (nemodulate în poziție). Așadar avionul este ghidat tot timpul în unghiul de $\pm$ 1o^0 față de axa centrală. Intr-o variantă extinsă, MLS balează orizontal, pentru direcție, un unghi de $\pm$ 6o^0, iar pentru panta un unghi de 1^0- 2o^0, astfel încît un avion care se află în interiorul acestui unghi solid este tot timpul ghidat, astfel încît poate ateriza după traseul care-i convine, dela cca 2o mile nautice distanță de pragul pistei. Sînt dispuse antene suplimentare, astfel încît să asigure toate fazele aterizării, inclusiv ghidajul de pistă. Pentru punerea avonului pe pistă se utilizează un fascicul suplimentar care balează un unghi de o,5^0. Aceasta face posibilă aterizarea automată, pentru toate clasele categoriei a III-a. Evident, utilizarea radioaltimetrului și a DME-ului nu sînt suprimate. Pentru decolare, o instalație suplimentară MLS asigură ghidajul, eventual și pentru ratarea aterizării.

Foarte importantă este posibilitatea de a ghida rularea pe pistă; recent au mai apărut cazuri de avioane care au părăsit pista, din cauza timpului nefavorabil. In prezent există preocuparea de a regla și șocul care apare la punerea avionului pe pistă. Dacă la MLS se adaogă și instalațiile de predicție ale turbulenței atmosferice (așa cum am arătat în XIV-2) atunci problema aterizării este în întregime rezolvată. De altfel, navetele spațiale aterizează fără ratare, deși nu posedă toate comenzile pentru aterizare, ale unui avion de transport.

XV-8. Tendințe în avionică

Probabil cea mai importantă tendință în avionică este "digital avionics", datorită progreselor remarcabile ale dispozitivelor electronice în direcția reducerii gabaritului, consumului și costului, odată cu creșterea remarcabilă a vitezei de răspuns și a fiabilității. Această tendință apare și în domeniul radio comunicațiilor din aviație; există deja sisteme de radio de bord digitalizate.-

Un alt aspect important este introducerea inteligenței artificiale în sistemul de conducere a zborului; principii elementare ale inteligenței artificiale sînt deja prezente în aeronautică și cosmonautică, de exemplu comanda vocală care enunță direct rezultatul dorit.

Pentru AZ care sînt conduse cu echipaj uman se studiază de mai mulți ani sistemul integrat om-mașină; de exemplu, pentru un pilot automat, în schema automatului este introdus și pilotul uman, echivalent unui bloc caracterizat prin dinamica stimul-răspuns.

.//.

După cum am mai arătat, sateliţii de navigaţie vor permite poziţionarea foarte exactă a unui AZ, de exemplu în interiorul unei sfere cu raza de 10 m. La aceasta se poate adăuga radarul de urmărire a terenului, cuplat cu sistemul inerţial de navigaţie, care urmăreşte traseul pe o hartă aflată în memoria calculatorului de navigaţie.

Toate aceste programe au ca rezultat o creştere importantă a fiabilităţii AZ şi a echipamentului de avionică. De exemplu, detectarea defectelor într-un sistem atît de complex este asigurată prin software; în plus, la constatarea unor echipamente defecte, sistemul este reconfigurat, deoarece posedă o redondanţă corespunzătoare acestui scop.

O direcţie de cercetare în legătură cu fiabilitatea echipamentului de avionică este protecţia la descărcări electromagnetice în atmosferă, care devine cu atît mai importantă cu cît echipamentul electric este mai complex.

In fine, progresele avionicii au făcut posibilă realizarea unor sisteme ierarhizate, integrate, de conducere a zborului; unele tipuri de avioane de transport sînt deja realizate după acest concept.-

Centrul de multiplicat cursuri
I.P.B. Splaiul Independenței 313

Tiparul executat sub comanda nr. 98
Tiraj exemplare 239